

EINE KENNZEICHNUNG DER ENDLICHEN EINFACHEN
GRUPPEN $E_7(2^m)$, $m \geq 1$

DISSERTATION
zur Erlangung des Grades
„DOKTOR DER NATURWISSENSCHAFT“
am Fachbereich Mathematik
der Johannes Gutenberg - Universität in Mainz

JÜRGEN BIERBRAUER
geb. in Wiesbaden

Mainz 1976

EINE KENNZEICHNUNG DER ENDLICHEN EINFACHEN
GRUPPEN $E_7(2^m)$, $m \geq 1$

DISSERTATION

zur Erlangung des Grades

" DOKTOR DER NATURWISSENSCHAFT "

am Fachbereich Mathematik

der Johannes Gutenberg-Universität in Mainz

Jürgen Bierbrauer

geb. in Wiesbaden

Mainz 1976



Ziel der vorliegenden Arbeit ist der Beweis der folgenden Aussage

Satz. Sei G eine endliche einfache Gruppe und v_1 eine Involution in G derart, daß der Zentralisator $C_G(v_1)$ von v_1 in G isomorph ist zum Zentralisator einer 2-zentralen Involution von $E_7(q)$, $q=2^m$, $m \geq 1$. Dann ist G isomorph zu $E_7(q)$.

Der Zentralisator C von v_1 in G ist zerfallende Erweiterung einer speziellen 2-Gruppe der Ordnung q^{33} mit $PS_{12}(q)$.

Wir zeigen, daß eine Sylow-2-Untergruppe von C auch eine Sylow-2-Untergruppe von G ist und konstruieren dann eine Untergruppe G_0 von G , die von einem BN-Paar des Typs E_7 erzeugt wird. Es folgt aus einem Satz von TITS, daß G_0 zu $E_7(q)$ isomorph ist. Die Annahme $G_0 \neq G$ führt zu einem Widerspruch, da in diesem Fall G_0 eine stark eingebettete Untergruppe von G sein müßte.

In Teil 1 stellen wir grundlegende Aussagen über die Gruppen $E_7(2^m)$ zusammen und geben die Struktur der Zentralisatoren von Involutionen in $E_7(2^m)$ an. Tabelle 3, in der die Struktur einer Sylow-2-Untergruppe von $E_7(q)$ enthalten ist, wurde mittels eines Computerprogramms erstellt.

In Teil 2 wird dann der obige Satz bewiesen.

Die Notation ist Standard. Konjugation bezeichnen wir mit $a^b = bab^{-1}$.

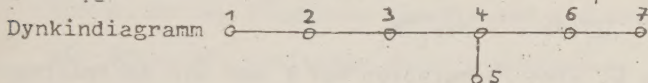
Teil 1. Über die Struktur der Gruppen $E_7(2^m)$.

Sei V ein 8-dimensionaler reeller Vektorraum, $\{e_1, \dots, e_8\}$ eine Basis von V . Wir führen auf V das euklidische Skalarprodukt $(\ , \)$ ein durch $(e_i, e_j) = \delta_{ij}$.

Die Elemente $r_1, \dots, r_7$ mit

$$\begin{aligned} r_1 &= e_2 - e_3, & r_2 &= e_3 - e_4, & r_3 &= e_4 - e_5, & r_4 &= e_5 - e_6, \\ r_5 &= e_6 - e_7, & r_6 &= e_6 + e_7, & r_7 &= -\frac{1}{2} \sum_{j=1}^8 e_j \end{aligned}$$

erzeugen dann ein Wurzelsystem Φ vom Typ E_7 zum



$\{r_1, \dots, r_7\}$ ist ein System von Fundamentalwurzeln für Φ . Das System Φ^+ der positiven Wurzeln von Φ besteht aus 63 Elementen $r_1, \dots, r_{63}$.

Bezeichnen wir die Wurzel $\sum_{j=1}^7 a_j r_j$ mit $a_1 a_2 \dots a_7$, so erhalten wir die folgenden positiven Wurzeln

$r_1 = 1000000$	$r_2 = 0100000$	$r_3 = 0010000$	$r_4 = 0001000$
$r_5 = 0000100$	$r_6 = 0000010$	$r_7 = 0000001$	
$r_8 = 1100000$	$r_9 = 1110000$	$r_{10} = 1111000$	$r_{11} = 1111100$
$r_{12} = 0110000$	$r_{13} = 0111000$	$r_{14} = 0111100$	$r_{15} = 0011000$
$r_{16} = 0011100$	$r_{17} = 0001100$	$r_{18} = 1111110$	$r_{19} = 1112110$
$r_{20} = 1122110$	$r_{21} = 1222110$	$r_{22} = 0111110$	$r_{23} = 0112110$
$r_{24} = 0122110$	$r_{25} = 0011110$	$r_{26} = 0012110$	$r_{27} = 0001110$
$r_{28} = 1111010$	$r_{29} = 0111010$	$r_{30} = 0011010$	$r_{31} = 0001010$
$r_{32} = 1234232$	$r_{33} = 1234231$	$r_{34} = 1111111$	$r_{35} = 1112111$
$r_{36} = 1122111$	$r_{37} = 1222111$	$r_{38} = 0111111$	$r_{39} = 0112111$
$r_{40} = 0122111$	$r_{41} = 0011111$	$r_{42} = 0012111$	$r_{43} = 0001111$

$$\begin{array}{llll}
 r_{44} = 1111011 & r_{45} = 0111011 & r_{46} = 0011011 & r_{47} = 0001011 \\
 r_{48} = 0000011 & r_{49} = 0123121 & r_{50} = 0122121 & r_{51} = 0112121 \\
 r_{52} = 0012121 & r_{53} = 1123121 & r_{54} = 1122121 & r_{55} = 1112121 \\
 r_{56} = 1223121 & r_{57} = 1222121 & r_{58} = 1233121 & r_{59} = 0123221 \\
 r_{60} = 1123221 & r_{61} = 1223221 & r_{62} = 1233221 & r_{63} = 1234221
 \end{array}$$

Für $r, s \in \underline{\mathfrak{g}}$ setzen wir $s(r) = (s, r)$.

In Tabelle 1 sind die Werte $r_j(r_i)$, $i=1, \dots, 7$; $j=1, \dots, 63$ angegeben.

Wir setzen für jedes i , $1 \leq i \leq 63$ und jedes r

$$\tilde{w}_i(r) = r - r(r_i)r_i.$$

Dann ist $\tilde{w}_i$ eine Permutation auf $\underline{\mathfrak{g}}$ und wir definieren die Weylgruppe $\tilde{W}$ zum Wurzelsystem $\underline{\mathfrak{g}}$ durch

$$\tilde{W} = \langle \tilde{w}_1, \dots, \tilde{w}_7 \rangle.$$

Künftig fassen wir $\tilde{W}$ als Permutationsgruppe auf den Indizes $\pm 1, \dots, \pm 63$ auf, d.h.

$$\tilde{w}(i)=j \quad \text{falls } \tilde{w}(r_i)=r_j \text{ gilt.}$$

In Tabelle 2 ist die Operation der $\tilde{w}_i$, $i=1, \dots, 7$, angegeben.

Sei jetzt E eine Chevalleygruppe vom Typ E_7 über einem Körper mit q Elementen, $q=2^m$, $m \geq 1$.

Wir verwenden die Bezeichnungen aus [1].

Dann gilt $E = \langle x_i(\alpha) | i=\pm 1, \dots, \pm 63, \alpha \in K \rangle = UHWU$.

Dabei gilt $X_i = \{x_i(\alpha) | \alpha \in K\} \cong E_q$; die Gruppe U mit $U = \prod_{i=1}^6 X_i$ ist eine Sylow-2-Untergruppe von E und es gilt

$$x_i(\alpha)x_i(\beta) = x_i(\alpha + \beta), \quad \alpha, \beta \in K$$

$$[x_i(\alpha), x_j(\beta)] = (1) \ 1, \text{ falls } r_i + r_j \notin \underline{\mathfrak{g}}$$

$$(2) \ x_k(\alpha\beta), \text{ falls } r_i + r_j$$

$$= r_k \in \underline{\mathfrak{g}}$$

für linear unabhängige Wurzeln r_i, r_j .

Weiterhin gilt $N_E(U) = UH$, $H = H_1 \times H_2 \times \dots \times H_7$,

$H_i = \{h_i(\lambda) \mid \lambda \in K^\times\}$, $h_i(\lambda)h_i(\mu) = h_i(\lambda\mu)$, $\lambda, \mu \in K^\times$,
 $h_i(\lambda)^{-1}x_j(\alpha)h_i(\lambda) = x_j(\alpha \cdot \lambda^{(r_i, r_j)})$.

Ist r_i eine positive Wurzel, $r_i = \sum_{j=1}^7 a_j r_j$, so bezeichne
 $h(r_i) = \sum_{j=1}^7 a_j$ die Höhe von r_i .

Bezeichnen wir das Erzeugnis derjenigen Wurzeluntergruppen X_j , die $r_j > 0$ und $h(r_j) \geq i$ erfüllen, mit $U(i)$, so erhalten wir eine Zentralreihe von U . Diese stimmt überein mit der oberen und mit der unteren Zentralreihe von U . In der folgenden Tabelle ist die Verteilung der Höhen der positiven Wurzeln angegeben.

Höhe	<u>Indizes der Wurzeln</u>						
1	1	2	3	4	5	6	7
2	8	12	15	17	31	48	
3	9	13	16	27	30	47	
4	10	14	25	29	43	46	
5	11	22	26	28	41	45	
6	18	23	38	42	44		
7	19	24	34	39	52		
8	20	35	40	51			
9	21	36	50	55			
10	37	49	54				
11	53	57	59				
12	56	60					
13	58	61					
14	62						
15	63						
16	33						
17	32						

Für jedes i , $1 \leq i \leq 63$, gibt es einen Epimorphismus

γ_i von $SL(2, q)$ auf $\langle X_i, X_{-i} \rangle$ mit folgenden Eigenschaften

$$x_i(\alpha) = \gamma_i \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \alpha & 1 \end{pmatrix}, \quad x_{-i}(\alpha) = \gamma_i \begin{pmatrix} 1 & \alpha \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad h_i(\lambda) = \gamma_i \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda^{-1} \end{pmatrix}$$

Setzen wir $w_i = \gamma_i \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, so ist $W = \langle w_1, \dots, w_7 \rangle$

isomorph zu $\tilde{W}$ und ein Isomorphismus wird durch

$$w_i \rightarrow \tilde{w}_i \text{ bewirkt. Es gilt } |W| = 2^{10} 3^4 5 \cdot 7.$$

Die Operation von W ist gegeben durch

$$w x_i(\alpha) w^{-1} = x_{\tilde{W}(i)}(\alpha).$$

Tabelle 3 enthält die Werte ijk mit $i, j, k > 0$, für die

$r_i + r_j = r_k$ ist, für die also gilt

$$[x_i(\alpha), x_j(\beta)] = x_k(\alpha\beta) \text{ für alle } \alpha, \beta \in K.$$

Die Ordnung von E ist

$$q^{63}(q^2-1)(q^6-1)(q^8-1)(q^{10}-1)(q^{12}-1)(q^{14}-1)(q^{18}-1).$$

Die Gruppe E hat genau 5 konjugierten Klassen von

Involutionen und die Elemente $v_1, \dots, v_5$ mit

$$v_1 = x_{32}(1), \quad v_2 = x_{58}(1)x_{61}(1), \quad v_3 = x_{53}(1)x_{57}(1)x_{59}(1),$$

$$v_4 = x_{21}(1)x_{36}(1)x_{55}(1)x_{59}(1), \quad v_5 = x_{21}(1)x_{36}(1)x_{55}(1)$$

sind Vertreter dieser Klassen.

Für $i=1, 2, 3, 4, 5$ setzen wir $C_i = C_E(v_i)$, $U_i = U \cap C_i$,

$W_i = W \cap C_i$, $H^i = H \cap C_i$. Für jedes j , $-63 \leq j \leq 63$, bezeichne

$B_i(j)$ die Bahn von w_i auf $\overline{\mathcal{E}}$, die j enthält.

Sind $x_{i1}(1), \dots, x_{in}(1)$ paarweise vertauschbar, so

bezeichne $D_{i1}, \dots, D_{in}$ die Gruppe $\{x_{i1}(\alpha) \dots x_{in}(\alpha) =$

$$= d_{i1}, \dots, d_{in}(\alpha) \mid \alpha \in K\}.$$

Wir beschreiben nun die Struktur der Zentralisatoren

C_i , $i=1,2,3,4,5$.

1) $W_1 = \langle w_1, \dots, w_6 \rangle$ ist Weylgruppe vom Typ D_6

$$|W_1| = 2^9 3^2 5.$$

$$B_1(32) = \{32\}$$

$$B_1(21) = \pm \{1, \dots, 6, 8, \dots, 31\}$$

$$B_1(33) = \{7, 33, \dots, 63\},$$

$$U_1 = U, O_2(C_1) = X_{32}(\prod X_j, j \in B_1(33)), |O_2(C_1)| = q^{33},$$

$$O_2(C_1) = Q_{33} Q_{34} \dots Q_{48}, \text{ wobei } Q_{33} = \langle X_7, X_{33} \rangle \text{ und}$$

$$Q_j = \langle X_j, X_{j+15} \rangle \text{ f\"ur } j=34, \dots, 48 \text{ ist.}$$

Die Q_j , $j=33, \dots, 48$ sind isomorphe spezielle Gruppen der Ordnung q^3 mit Zentrum X_{32} . Im Fall $q=2$ ist $Q_j \cong D_8$

und $O_2(C_1)$ ist extraspeziell vom Diedertyp.

$$\text{Es gilt } C_1 = O_2(C_1) \cdot L_1, L_1 = UH^1 W_1 U^1 \cong D_6(q),$$

$$U^1 = (\prod X_j, j \in B_1(21), j > 0), H^1 = H_1 \dots H_6.$$

Die Gruppe L_1 bewirkt auf $O_2(C_1)/X_{32}$ eine irreduzible Darstellung. Es ist

$$|C_1| = q^{63}(q^2-1)(q^4-1)(q^6-1)^2(q^8-1)(q^{10}-1), Z(C_1) = X_{32}.$$

$$2) W_2 = W_{21} \times W_{22}, W_{21} = \langle w_1 \rangle, W_{22} = \langle w_7, w_6, w_4, w_3 w_5 \rangle,$$

$$|W_{22}| = 2^7 3. \text{ Die Gruppe } W_{22} \text{ ist eine Weylgruppe vom Typ}$$

$$B_4 \text{ zum Dynkindiagramm } \begin{array}{ccccccc} & w_7 & & w_6 & & w_4 & & w_3 w_5 \\ & \circ & \text{---} & \circ & \text{---} & \circ & \text{---} & \circ \end{array}$$

$$B_2(58) = \{58, 61\}$$

$$E_2(1) = \pm \{1\}$$

$$B_2(2) = \{2, 8, \dots, 14, 18, 19, 20, 22, 23, 24, 28, 29, 34, 35, 36, 38, \\ 39, 40, 44, 45, 49, 50, 51, 53, 54, 55, 59, 60\}$$

$$B_2(32) = \{21, 32, 33, 37, 56, 57, 62, 63\}$$

$$E_2(52) = \pm \{4, 6, 7, 16, 25, 26, 31, 41, 42, 47, 48, 52\}$$

$$B_2(43) = \pm \{3, 5, 15, 17, 27, 30, 43, 46\},$$

$$O_2(C_2) = \langle \prod X_j, j \in B_2(58) \cup B_2(32) \cup B_2(2) \rangle, |O_2(C_2)| = q^{42}.$$

$$\text{Wir setzen } B_{21} = \{2, 14, 22, 23, 38, 39, 51, 59\},$$

$$B_{22} = \{8, 11, 18, 19, 34, 35, 55, 60\},$$

$$B_{23} = \{9, 10, 20, 28, 36, 44, 53, 54\},$$

$$B_{24} = \{12, 13, 24, 29, 40, 45, 49, 50\},$$

$$D_1 = \langle \prod X_j, j \in B_{21} \cup B_{24} \rangle, D_2 = \langle \prod X_j, j \in B_{22} \cup B_{23} \rangle.$$

$$\text{Dann gilt } D_1 \cong D_2 \cong E_q 16, O_2(C_2) = Z(O_2(C_2)) D_1 D_2,$$

$$Z(O_2(C_2)) = \langle \prod X_j, j \in B_2(58) \cup B_2(32) \rangle, Z(O_2(C_2)) \cong E_q 10.$$

$$\text{Es gilt } C_2 = O_2(C_2)(L_{21} \times L_{22}),$$

$$L_{21} = X_1 H_1 \langle w_1 \rangle X_1 \cong SL(2, q),$$

$$L_{22} = U^{22} H^{22} W_{22} U^{22} \cong Sp(8, q),$$

$$U^{22} = \langle \prod X_j, j \in B_2(52), j > 0 \rangle^{D_{3,5} D_{15,17} D_{27,30} D_{43,46}} = U \cap L_{22}, \\ |U^{22}| = q^{16}.$$

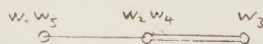
Die Gruppe L_{22} operiert **unzerlegbar** auf $Z(O_2(C_2))/D_{58,61}$, operiert irreduzibel und isomorph auf D_1 und D_2 .

Die Gruppe L_{21} zentralisiert $Z(O_2(C_2))$, operiert in kanonischer Weise auf den Gruppen $X_j X_{w_1}(j)$, $j \in B_2(2)$.

Es ist $|C_2| = q^{59} (q^2 - 1)^2 (q^4 - 1) (q^6 - 1) (q^8 - 1)$, $Z(C_2) = D_{59,61}$ und $X_{32} = Z_{10}(U^2) \cap Z(U^2)$.

$$3) W_3 = W_{31} \times W_{32}, W_{31} = \langle w_7 \rangle, W_{32} = \langle w_1 w_5, w_2 w_4, w_3 \rangle.$$

Die Gruppe W_{32} ist Weylgruppe vom Typ B_3 zum Dynkindiagramm



und es ist $|W_{32}| = 2^4 3$.

$$B_3(59) = \{53, 57, 59\}$$

$$B_3(28) = \{22, 26, 28, 38, 42, 44\}$$

$$B_3(32) = \{32, 33\}$$

$$B_3(63) = \{49, 50, 51, 52, 54, 55, 56, 58, 60, 61, 62, 63\}$$

$$B_3(48) = \{6, 18, \dots, 21, 23, 24, 25, 27, 29, 30, 31, 34, \dots, 37, \\ 39, 40, 41, 43, 45, \dots, 48\}$$

$$B_3(7) = \pm \{7\}$$

$$B_3(11) = \pm \{3, 11, 13\}$$

$$B_3(1) = \pm \{1, 2, 4, 5, 8, 9, 10, 12, 14, 15, 16, 17\},$$

$$O_2(C_3) = (\prod X_j, j \in B_3(59) \cup B_3(32) \cup B_3(63) \cup B_3(48)) \\ D_{22, 26} D_{22, 28} D_{38, 42} D_{38, 44},$$

$$|O_2(C_3)| = q^{45},$$

$$\text{Es gilt } C_3 = O_2(C_3)(L_{31} \times L_{32}),$$

$$L_{31} = \langle X_7, X_{-7} \rangle \cong SL(2, q),$$

$$L_{32} = U^{32} H^{32} W_{32} U^{32} \cong Sp(6, q),$$

$$U^{32} = (\prod X_j, j \in B_3(11), j > 0) D_{1, 5} D_{2, 4} D_{8, 17} D_{9, 16} D_{10, 14} \\ D_{12, 15},$$

$$H^{32} = H_{2, 4} H_{1, 5} H_3,$$

$$Z(O_2(C_3)) = X_{32} X_{33} D_{53, 57, 59} \cong E_q^3,$$

$$Z_2(O_2(C_3)) = \prod X_j, j \in B_3(59) \cup B_3(63) \cup B_3(32),$$

$$Z_2(O_2(C_3)) \cong E_q^{17}.$$

$$\text{Wir setzen } B_{32}(37) = \{34, \dots, 37, 39, 40, 41, 43, 45, \dots, 48\},$$

$$B_{32}(21) = \{6, 18, \dots, 21, 23, 24, 25, 27, 29, 30, 31\}.$$

Die Gruppe L_{32} zentralisiert $Z(O_2(C_3))$, bewirkt isomorphe irreduzible 14-dimensionale Darstellungen auf den folgenden elementar-abelschen Gruppen:

$$D_{53, 57} D_{53, 59} \prod X_j, j \in B_3(63); D_{38, 44} D_{38, 42} \prod X_j, j \in B_{32}(37);$$

$$D_{22, 28} D_{22, 26} \prod X_j, j \in B_{32}(21).$$

Die Gruppe L_{31} zentralisiert $\prod X_j, j \in B_3(59) \cup B_3(63)$, operiert kanonisch auf $X_{32} X_{33}$ und auf den Gruppen

$$X_j, X_{w_7(j)}, j \in B_{32}(21).$$

Insbesondere ist $Z(C_3) = D_{53,57,59}$ und

$$|C_3| = q^{55}(q^2-1)^2(q^4-1)(q^6-1). \text{ Es ist } X_{32} = Z_9(U^3),$$

4) $W_4 = \langle w_4, w_3 w_6, w_2 \bar{w}_7 \rangle$ ist Weylgruppe vom Typ B_3 zum

Dynkindiagramm $\begin{array}{c} w_4 \quad w_3 w_6 \quad w_2 w_7 \\ \circ \text{---} \circ \text{---} \circ \end{array}$

und es ist $|W_4| = 2^4 3$.

$$B_4(59) = \{59\}$$

$$B_4(21) = \{21, 36, 55\}$$

$$B_4(32) = \{32, 33, 63, 62, 61, 60\}$$

$$B_4(49) = \{5, 17, 25, 26, 38, 39, 49, 50\}$$

$$B_4(58) = \{11, 18, 19, 20, 34, 35, 37, 53, 54, 56, 57, 58\}$$

$$B_4(44) = \{1, 8, 9, 10, 28, 44\}$$

$$B_4(51) = \{14, 16, 22, 23, 24, 27, 40, 41, 42, 43, 51, 52\}$$

$$B_4(45) = \pm \{4, 30, 45\}$$

$$B_4(46) = \pm \{2, 3, 6, 7, 12, 13, 15, 29, 31, 46, 47, 48\},$$

$$O_2(C_4) = (\prod X_j, j \in \{59\} \cup B_4(21) \cup B_4(32) \cup B_4(49) \cup B_4(58)) \cdot D,$$

$$D = D_{1,16} D_{1,27} D_{8,14} D_{8,43} D_{9,22} D_{9,41} D_{10,23} D_{10,42}$$

$$D_{28,24} D_{28,52} D_{44,40} D_{44,51},$$

$$Z(O_2(C_4)) = D_{21,36,55,59} \prod X_j, j \in B_4(32) \cong E_{q^7},$$

$$Z_2(O_2(C_4)) = Z(O_2(C_4)) X_{59} \prod X_j, j \in B_4(21) \cup B_4(58) \cong E_{q^{22}}.$$

Die Gruppe $\prod X_j, j \in \{59\} \cup B_4(49) = Q_{5,49} Q_{17,50} Q_{25,39} Q_{26,38}$ ist speziell der Ordnung q^9 mit Zentrum X_{59} .

$$\text{Es gilt } Z_3(O_2(C_4)) = O_2(C_4),$$

$$\prod D, \prod X_j, j \in B_4(49) \cup B_4(51) = \prod X_j, j \in B_4(58).$$

$$\text{Es ist } C_4 = O_2(C_4) L_E, L_E = {}^{w_4} E {}^{w_4} U {}^{w_4} \cong \text{Sp}(6, q),$$

$$U^4 = (\prod X_j, j \in B_4(45), j > 0) D_{2,7} D_{3,6} D_{12,48} D_{13,47} D_{15,31}$$

$$D_{29,46} = U \cap L_4,$$

$$H^4 = H_L H_{3,6} H_{2,7}.$$

Die Gruppe L_4 operiert auf $[L_4, O_2(C_4)]$ mit

$$[L_4, O_2(C_4)] = D(\prod X_j, j \in \{59\} \cup B_4(32) \cup B_4(49) \cup B_4(58)) D_{21,36} D_{36,55} \text{ und es gilt}$$

$$O_2(C_4) = [L_4, O_2(C_4)] \cdot D_{21,36,55}.$$

Die Gruppe L_4 zentralisiert $D_{21,36,55} X_{59}$, operiert in kanonischer Weise auf $\prod X_j, j \in B_4(32)$, bewirkt eine 14-dimensionale irreduzible Darstellung auf

$D_{21,36} D_{36,55} \prod X_j, j \in B_4(58)$ und operiert kanonisch auf den Gruppen

$$D_{16,27} D_{14,43} D_{22,41} D_{23,42} D_{24,52} D_{40,51} X_{59}/X_{59} \text{ und}$$

$$D/(X_{59} D_{16,27} D_{14,43} D_{22,41} D_{23,42} D_{24,52} D_{40,51})$$

Weiter operiert L_4 irreduzibel auf

$$\prod X_j, j \in B_4(49) \text{ modulo } X_{59} D_{16,27} \dots D_{40,51}.$$

$$\text{Es gilt } Z(C_4) = D_{21,36,55,59}, X_{32} = Z_9(U^4),$$

$$\text{und } |C_4| = q^{51}(q^2-1)(q^4-1)(q^6-1).$$

5) $W_5 = \langle w_5, w_4, w_3 w_6, w_2 w_7 \rangle$ ist Weylgruppe vom Typ F_4 zum Dynkindiagramm



und mit der Ordnung $2^7 3^2$.

$$B_5(21) = \{21, 36, 55\}$$

$$B_5(32) = \{1, 8, 9, 10, 11, 18, 19, 20, 22, 32, 33, 34, 35, 37, 44, 53, 54, 56, 57, 58, 60, 61, 62, 63\}$$

$$B_5(59) = \pm \{4, 5, 17, 25, 26, 30, 38, 39, 45, 49, 50, 59\}$$

$$B_5(51) = \pm \{2, 7, 22, 41, 23, 42, 29, 46, 14, 43, 13, 47, 12, 48, 24, 52, 3, 6, 16, 27, 15, 31, 40, 51\}.$$

$$O_2(C_5) = \prod X_j, j \in B_5(21) \cup B_5(32) \cong E_q 27, O_2(C_5) < U,$$

$$O_2(C_5) = C_U(O_2(C_5)).$$

$$\text{Es ist } C_5 = O_2(C_5)L_5, L_5 = U^5 H^5 W_5 U^5 \cong F_4(q),$$

$$U^5 = \{\prod X_j, j \in B_5(59), j > 0\} D_5,$$

$$D_5 = D_2, 7^D_{22}, 41^D_{23}, 42^D_{29}, 46^D_{14}, 43^D_{13}, 47^D_{12}, 48^D_{24}, 52$$

$$D_3, 6^D_{16}, 27^D_{15}, 31^D_{40}, 51,$$

$$H^5 = H_5 H_4 H_3, 6^H_{2,7}.$$

Die Gruppe L_5 bewirkt eine irreduzible Darstellung

auf $O_2(C_5)/Z(C_5)$. Dabei ist $Z(C_5) = D_{21,36,55}$.

Die Gruppe L_5 operiert sogar auf der elementar

abelschen Gruppe $(\prod X_j, j \in B_5(32))^{D_{21,36,55}}$

der Ordnung q^{26} .

Weiter gilt $X_{32} = [Z_{10}(U^5), Z_3(U^5)]$ und

$$|C_5| = q^{51}(q^2-1)(q^6-1)(q^8-1)(q^{12}-1).$$

Tabelle 1

Tabelle 2

1	2	-1	0	0	0	0	0
2	-1	2	-1	0	0	0	0
3	0	-1	2	-1	0	0	0
4	0	0	-1	2	-1	-1	0
5	0	0	0	-1	2	0	0
6	0	0	0	-1	0	2	-1
7	0	0	0	0	0	-1	2
8	1	1	-1	0	0	0	0
9	1	0	1	-1	0	0	0
10	1	0	0	1	-1	-1	0
11	1	0	0	0	1	-1	0
12	-1	1	1	-1	0	0	0
13	-1	1	0	1	-1	-1	0
14	-1	1	0	0	1	-1	0
15	0	-1	1	1	-1	-1	0
16	0	-1	1	0	1	-1	0
17	0	0	-1	1	1	-1	0
18	1	0	0	-1	1	1	-1
19	1	0	-1	1	0	0	-1
20	1	-1	1	0	0	0	-1
21	0	1	0	0	0	0	-1
22	-1	1	0	-1	1	1	-1
23	-1	1	-1	1	0	0	-1
24	-1	0	1	0	0	0	-1
25	0	-1	1	-1	1	1	-1
26	0	-1	0	1	0	0	-1
27	0	0	-1	0	1	1	-1
28	1	0	0	0	-1	1	-1
29	-1	1	0	0	-1	1	-1
30	0	-1	1	0	-1	1	-1
31	0	0	-1	1	-1	1	-1
32	0	0	0	0	0	0	1
33	0	0	0	0	0	1	-1
34	1	0	0	-1	1	0	1
35	1	0	-1	1	0	-1	1
36	1	-1	1	0	0	-1	1
37	0	1	0	0	0	-1	1
38	-1	1	0	-1	1	0	1
39	-1	1	-1	1	0	-1	1
40	-1	0	1	0	0	-1	1
41	0	-1	1	-1	1	0	1
42	0	-1	0	1	0	-1	1
43	0	0	-1	0	1	0	1

-1	8	1	1	1	1	1
8	-2	12	2	2	2	2
3	12	-3	15	3	3	3
4	4	15	-4	17	31	4
5	5	5	17	-5	5	5
6	6	6	31	6	-6	48
7	7	7	7	7	48	-7
2	1	9	8	8	8	8
12	9	8	10	9	9	9
13	10	10	9	11	28	10
14	11	11	11	10	18	11
9	3	2	13	12	12	12
10	15	13	12	14	29	13
11	16	14	14	13	22	14
15	13	4	3	16	30	15
16	14	17	16	15	25	16
17	17	16	5	4	27	17
22	18	18	19	28	11	34
23	19	20	18	19	19	35
24	21	19	20	20	20	36
21	20	21	21	21	21	37
18	25	22	23	29	14	38
19	26	24	22	23	23	39
20	24	23	24	24	24	40
25	22	27	26	30	16	41
26	23	26	25	26	26	42
27	27	25	27	31	17	43
29	28	28	28	18	10	44
28	30	29	29	22	13	45
30	29	31	30	25	15	46
31	31	30	6	27	4	47
32	32	32	32	32	32	33
33	33	33	33	33	63	32
38	34	34	35	44	34	18
39	35	36	34	35	55	19
40	37	35	36	36	54	20
37	36	37	37	37	57	21
34	41	38	39	45	38	22
35	42	40	38	39	51	23
36	40	39	40	40	50	24
41	38	43	42	46	41	25
42	39	42	41	42	52	26
43	43	41	43	47	43	27

44	1	0	0	0	-1	0	1	45	44	44	44	34	44	28
45	-1	1	0	0	-1	0	1	44	46	45	45	38	45	29
46	0	-1	1	0	-1	0	1	46	45	47	46	41	46	30
47	0	0	-1	1	-1	0	1	47	47	46	48	43	47	31
48	0	0	0	-1	0	1	1	48	48	48	47	48	7	6
49	-1	0	0	1	-1	0	0	53	49	49	50	59	49	49
50	-1	0	1	-1	0	1	0	54	50	51	49	50	40	50
51	-1	1	-1	0	0	1	0	55	52	50	51	51	39	51
52	0	-1	0	0	0	1	0	52	51	52	52	52	42	52
53	1	-1	0	1	-1	0	0	49	56	53	54	60	53	53
54	1	-1	1	-1	0	1	0	50	57	55	53	54	36	54
55	1	0	-1	0	0	1	0	51	55	54	55	55	35	55
56	0	1	-1	1	-1	0	0	56	53	58	57	61	56	56
57	0	1	0	-1	0	1	0	57	54	57	56	57	37	57
58	0	0	1	0	-1	0	0	58	58	56	58	62	58	58
59	-1	0	0	0	1	0	0	60	59	59	59	49	59	59
60	1	-1	0	0	1	0	0	59	61	60	60	53	60	60
61	0	1	-1	0	1	0	0	61	60	62	61	56	61	61
62	0	0	1	-1	1	0	0	62	62	61	63	58	62	62
63	0	0	0	1	0	-1	0	63	63	63	62	63	33	63

Tabelle 3

Die Tripel 1 j k mit $r_1 + r_j = r_k$

33 7 32	63 6 33	63 48 32	62 4 63	62 31 33	62 47 32
58 5 62	58 17 63	58 27 33	58 43 32		
61 3 62	61 15 63	61 30 33	61 46 32		
56 3 58	56 5 61	56 16 63	56 25 33	56 41 32	
60 2 61	60 12 62	60 13 63	60 29 33	60 45 32	
53 2 56	53 5 60	53 12 58	53 14 63	53 22 33	53 38 32
57 4 56	57 15 58	57 16 62	57 17 61	57 26 33	57 42 33
59 1 60	59 8 61	59 9 62	59 10 63	59 28 33	59 44 32
37 6 57	37 25 62	37 26 63	37 27 61	37 30 58	
		37 31 56	37 52 32		
49 1 53	49 5 59	49 8 56	49 9 58	49 11 63	
		49 18 33	49 34 32		
54 2 57	54 4 53	54 13 58	54 14 62	54 17 60	
		54 23 33	54 39 32		
21 7 37	21 41 62	21 42 63	21 43 61	21 46 58	
		21 47 56	21 48 57	21 52 33	
36 2 37	36 6 54	36 22 62	36 23 63	36 27 60	
		36 29 58	36 31 53	36 51 32	
50 1 54	50 4 49	50 8 57	50 10 58	50 11 62	
		50 17 59	50 19 33	50 35 32	
55 3 54	55 12 57	55 13 56	55 14 61	55 15 53	
		55 16 60	55 24 33	55 40 32	
20 2 21	20 7 36	20 38 62	20 39 63	20 43 60	
	20 45 58	20 47 53	20 48 54	20 51 33	
35 3 36	35 6 55	35 12 37	35 22 61	35 24 63	
	35 25 60	35 29 56	35 30 53	35 50 32	
40 1 36	40 6 50	40 8 37	40 18 62	40 19 63	
	40 27 59	40 28 58	40 31 49	40 55 32	
51 1 55	51 3 50	51 9 57	51 10 56	51 11 61	
	51 15 49	51 16 59	51 20 33	51 36 32	
19 3 20	19 7 35	19 12 21	19 38 61	19 40 63	
19 41 60	19 45 56	19 46 53	19 48 55	19 50 33	
24 1 20	24 7 40	24 8 21	24 34 62	24 35 63	
24 43 59	24 44 58	24 47 49	24 48 50	24 55 33	
34 4 35	34 13 37	34 15 36	34 23 61	34 24 62	
34 26 60	34 29 57	34 30 54	34 31 55	34 49 32	
39 1 35	39 3 40	39 6 51	39 9 37	39 18 61	
39 20 63	39 25 59	39 28 56	39 30 49	39 54 32	
52 2 51	52 8 55	52 9 54	52 10 53	52 11 60	
52 12 50	52 13 49	52 14 59	52 21 33	52 37 32	

18 4 19	18 7 34	18 13 21	18 15 20	18 39 61	18 40 62
18 42 60	18 45 57	18 46 54	18 47 55	18 49 33	
23 1 19	23 3 24	23 7 39	23 9 21	23 34 61	23 36 63
23 41 59	23 44 56	23 46 49	23 48 51	23 54 33	
38 1 34	38 4 39	38 10 37	38 15 40	38 19 61	38 20 62
38 26 59	38 28 57	38 30 50	38 31 51	38 53 32	
42 2 39	42 6 52	42 8 35	42 9 36	42 12 40	42 18 60
42 21 63	42 22 59	42 28 53	42 29 49	42 57 32	
44 5 34	44 14 37	44 16 36	44 17 35	44 22 57	44 23 56
44 24 58	44 25 54	44 26 53	44 27 55	44 59 32	
11 6 18	11 29 21	11 30 20	11 31 19	11 45 37	11 46 31
11 47 35	11 48 34	11 49 63	11 50 62	11 51 61	11 52
22 1 18	22 4 23	22 7 38	22 10 21	22 15 24	22 35 61
22 36 62	22 42 59	22 44 57	22 46 50	22 47 51	22 53
26 2 23	26 7 42	26 8 19	26 9 20	26 12 24	26 34 60
26 37 63	26 38 59	26 44 53	26 45 49	26 48 52	26 57
28 5 18	28 7 44	28 14 21	28 16 20	28 17 19	28 38 57
28 39 56	28 40 58	28 41 54	28 42 53	28 43 55	28 59
41 2 38	41 4 42	41 8 34	41 10 36	41 13 40	41 19 60
41 21 62	41 23 59	41 28 54	41 29 50	41 31 52	41 56
45 1 44	45 5 38	45 11 37	45 16 40	45 17 39	45 18 57
45 19 56	45 20 58	45 25 50	45 26 49	45 27 51	45 60
10 5 11	10 6 28	10 22 21	10 25 20	10 27 19	
10 38 37	10 41 36	10 43 35	10 48 44	10 50 58	
		10 51 56	10 52 53	10 59 63	
14 1 11	14 6 22	14 28 21	14 30 24	14 31 23	
14 44 37	14 46 40	14 47 40	14 48 38	14 52 59	
		14 53 63	14 54 62	14 55 61	
25 2 22	25 4 26	25 7 41	25 8 18	25 10 20	
25 13 24	25 35 60	25 37 62	25 39 59	25 44 54	
		25 45 50	25 47 52	25 56 33	
29 1 28	29 5 22	29 7 45	29 11 21	29 16 24	
29 17 23	29 34 57	29 35 56	29 36 58	29 41 50	
		29 42 49	29 43 51	29 60 33	
43 3 41	43 9 34	43 10 35	43 12 38	43 13 39	
43 15 42	43 20 60	43 21 61	43 24 59	43 28 55	
		43 29 51	43 30 52	43 58 32	
46 2 45	46 5 41	46 8 44	46 11 36	46 14 40	
46 17 42	46 18 54	46 19 53	46 21 58	46 22 50	
		46 23 49	46 27 52	46 61 32	

9 4 10	9 17 11	9 23 21	9 26 20	9 27 18	9 31 28
9 39 37	9 42 36	9 43 34	9 47 44	9 49 58	9 51 57
				9 52 54	9 59 62
13 1 10	13 5 14	13 6 29	13 18 21	13 25 24	
13 27 23	13 34 37	13 41 40	13 43 39	13 48 45	
	13 52 49	13 54 58	13 55 56	13 60 63	
16 2 14	16 6 25	16 8 11	16 28 20	16 29 24	
16 31 26	16 44 36	16 45 36	16 47 42	16 48 41	
	16 51 59	16 55 60	16 56 63	16 57 62	
27 3 25	27 7 43	27 9 18	27 10 19	27 12 22	
27 13 23	27 15 26	27 36 60	27 37 61	27 40 59	
	27 44 55	27 45 51	27 46 52	27 58 33	
30 2 29	30 5 25	30 7 46	30 8 28	30 11 20	
30 14 24	30 17 26	30 34 54	30 35 53	30 37 58	
	30 38 50	30 39 49	30 43 52	30 61 33	
47 3 46	47 5 43	47 9 44	47 11 35	47 12 45	
47 14 39	47 16 42	47 18 55	47 20 53	47 21 56	
	47 22 51	47 24 49	47 25 52	47 62 32	
8 3 9	8 15 10	8 16 11	8 24 21	8 25 18	8 26 19
8 30 28	8 40 37	8 41 34	8 42 35	8 46 44	8 49 56
			8 50 57	8 52 55	8 59 61
12 1 9	12 4 13	12 17 14	12 19 21	12 26 24	
12 27 22	12 31 29	12 35 37	12 42 40	12 43 38	
12 47 45	12 52 50	12 53 58	12 55 57	12 60 62	
15 2 13	15 5 16	15 6 30	15 8 10	15 18 20	
15 22 24	15 27 26	15 34 36	15 38 40	15 43 42	
15 48 46	15 51 49	15 55 53	15 57 58	15 61 63	
17 3 16	17 6 27	17 9 11	17 12 14	17 28 19	
17 29 23	17 30 26	17 44 35	17 45 39	17 46 42	
17 48 43	17 50 59	17 54 60	17 57 61	17 58 63	
31 3 30	31 5 27	31 7 47	31 9 28	31 11 19	
31 12 29	31 14 23	31 16 26	31 34 55	31 36 53	
31 37 56	31 38 51	31 40 49	31 41 52	31 62 33	
48 4 47	48 10 44	48 11 34	48 13 45	48 14 38	
48 15 46	48 16 41	48 17 43	48 19 55	48 20 54	
48 21 57	48 23 51	48 24 50	48 26 52	48 63 32	
1 2 8	1 12 9	1 13 10	1 14 11	1 22 18	1 23 19
1 24 20	1 29 28	1 38 34	1 39 35	1 40 36	1 45 44
		1 49 53	1 50 54	1 51 55	1 59 60
2 1 8	2 3 12	2 15 13	2 16 14	2 20 21	2 25 22
2 26 23	2 30 29	2 36 37	2 41 38	2 42 39	2 46 45
		2 52 51	2 53 56	2 54 57	2 60 61

3 2 12	3 4 15	3 8 9	3 17 16	3 19 20	3 23 24
3 27 25	3 31 30	3 35 36	3 39 40	3 43 41	3 47 46
		3 51 50	3 55 54	3 56 58	3 61 62
5 3 15	4 5 17	4 6 31	4 9 10	4 12 13	4 18 19
4 22 23	4 25 26	4 34 35	4 38 39	4 41 42	4 48 47
		4 50 49	4 54 53	4 57 56	4 62 63
5 4 17	5 10 11	5 13 14	5 15 16	5 28 18	5 29 22
5 30 25	5 31 27	5 44 34	5 45 38	5 46 41	5 47 43
		5 49 59	5 53 60	5 56 61	5 58 62
6 4 31	6 7 48	6 10 28	6 11 18	6 13 29	6 14 22
6 15 30	5 16 25	6 17 27	6 35 55	6 36 54	6 37 57
		6 39 51	6 40 50	6 42 52	6 63 33
7 6 48	7 18 34	7 19 35	7 20 36	7 21 37	7 22 38
7 23 39	7 24 40	7 25 41	7 26 42	7 27 43	7 28 44
		7 29 45	7 30 46	7 31 47	7 33 32

Wir beschreiben nun die Klassen von Involutionen der Gruppe C_1 .

Es gilt $Z(C_1) = X_{32}$. In $C_1 - Z(C_1)$ sind $12+5q$ Klassen von Involutionen enthalten und die im folgenden aufgeführten

Elemente v_1^j , $j \in J_0 = \{1, 2, 3, 5, \dots, 8, 10, 11, 13, 15, 17\}$ und $v_1^j(\alpha)$, $\alpha \in K$, $j \in J_1 = \{4, 9, 12, 14, 15\}$ sind Vertreter:
 $v_1^1 = x_{33}(1)$, $v_1^2 = v_2$, $v_1^3 = v_3$, $v_1^4(\alpha) = x_{21}(1)x_{32}(\alpha)$,
 $v_1^5 = x_{21}(1)x_{60}(1)$, $v_1^6 = x_{21}(1)x_{53}(1)x_{59}(1)$, $v_1^7 = v_4$,
 $v_1^8 = v_5$, $v_1^9(\alpha) = x_{19}(1)x_{24}(1)x_{32}(\alpha)$, $v_1^{10} = x_{19}(1)x_{24}(1)x_{57}(1)$,
 $v_1^{11} = x_{19}(1)x_{24}(1)x_{54}(1)x_{37}(1)$,
 $v_1^{12}(\alpha) = x_{11}(1)x_{22}(1)x_{26}(1)x_{32}(\alpha)$,
 $v_1^{13} = x_{11}(1)x_{22}(1)x_{26}(1)x_{58}(1)$, $v_1^{14}(\alpha) = x_{11}(1)x_{26}(1)x_{32}(\alpha)$,
 $v_1^{15}(\alpha) = x_{11}(1)x_{24}(1)x_{28}(1)x_{32}(\alpha)$,
 $v_1^{16} = x_{22}(1)x_{26}(1)x_{28}(1)$, $v_1^{17} = x_{11}(1)x_{22}(1)x_{26}(1)x_{28}(1)$.

Wir setzen $U_1^j = C(v_1^j) \cap U \subseteq \text{Syl}_2(C(v_1^j) \cap C_1)$, $C_1^j = C(v_1^j) \cap C_1$,

$W_1^j = W_1 \cap C(v_1^j)$, $H_1^j = H^1 \cap C(v_1^j)$, $j=1 \dots 17$. Die Bahn von W_1^j , die k enthält, bezeichnen wir mit $B_1^j(k)$.

In $O_2(C_1) - Z(C_1)$ sind 3 Klassen von Involutionen enthalten und v_1^1 , v_1^2 , v_1^3 sind Vertreter dieser Klassen.

1) $v_1^1 \in v_1$, $W_1^1 = \{W_1, \dots, W_5\}$,

$B_1^1(32) = \{32\}$, $B_1^1(7) = \{7\}$, $B_1^1(33) = \{33\}$,

$B_1^1(21) = \{6, 18, \dots, 31\}$, $B_1^1(49) = \{34, \dots, 48\}$,

$B_1^1(63) = \{42, \dots, 61\}$, $P_1^1(1) = \{1, \dots, 5, 9, \dots, 17\}$,

$O_2(C_1^1) = \prod X_i$, $i \in P_1^1(32) \cup P_1^1(33) \cup B_1^1(21) \cup B_1^1(49) \cup B_1^1(63)$,

$O_2(C_1^1) = q^{h7}$, $C_1^1 = O_2(C_1^1)L_1^1$,

$L_1^1 = U_1^1(1)H_1^1V_1^1U_1^1(1) \cong \text{GL}(6, q)$, $F_1^1 = F_1 \dots F_5$,

$U_1^1(1) = \prod X_i$, $i \in P_1^1(1)$, $i > 0$,

$|C_1^1| = q^{62}(q^2-1)(q^3-1)(q^4-1)(q^5-1)(q^6-1)$.

Die Gruppe L_1^1 bewirkt isomorphe 15-dimensionale irreduzible Darstellungen auf

$(\Pi X_j, j \in B_1^1(21)), (\Pi X_j, j \in B_1^1(48))$ und auf $(\Pi X_j, j \in B_1^1(63))$.

$$2) W_1^2 = \langle w_1 \rangle \times \langle w_6, w_4, w_3 w_5 \rangle,$$

$$B_1^2(58) = \{58, 61\}, B_1^2(1) = \pm \{1\},$$

$$B_1^2(2) = B_2(2), B_1^2(21) = \{21\},$$

$$B_1^2(33) = \{33, 63, 62, 56, 57, 37\},$$

$$B_1^2(7) = \{7, 41, 42, 47, 48, 52\}, B_1^2(43) = \{43, 46\},$$

$$B_1^2(6) = \pm \{4, 6, 16, 25, 26, 31\}, B_1^2(3) = \pm \{3, 5, 15, 17, 27, 30\},$$

$$O_2(C_1^2) = O_2(C_2)(\Pi X_j, j \in B_1^2(7)), D_{43, 46},$$

$$|O_2(C_1^2)| = q^{49},$$

$$C_1^2 = O_2(C_1^2)L_1^2(1)L_1^2(2),$$

$$L_1^2(1) = X_1 H_1 \langle w_1 \rangle X_1 \cong SL_2(q),$$

$$L_1^2(2) = U_1^2(2) H_6 H_4 H_3, U_1^2(2) \cong Sp_5(q),$$

$$U_1^2(2) = (\Pi X_j, j \in B_1^2(6), j > 0) D_{3, 5} D_{15, 17} D_{27, 30},$$

$$W_1^2(2) = \langle w_6, w_4, w_3 w_5 \rangle,$$

$$|C_1^2| = q^{59} (q^2 - 1)^2 (q^4 - 1) (q^6 - 1).$$

$$3) W_1^3 = W_{32} = \langle w_1 w_5, w_2 w_4, w_3 \rangle,$$

$$B_1^3(57) = \{53, 57, 59\}, B_1^3(28) = \{22, 26, 28\},$$

$$B_1^3(44) = \{38, 42, 44\}, B_1^3(32) = \{32, 33\},$$

$$B_1^3(63) = B_3(63), B_1^3(21) = \{6, 18 \dots 21, 23 \dots 25, 27, 29, \dots, 31\},$$

$$B_1^3(48) = \{34 \dots 37, 39, 40, 41, 43, 45 \dots 48\},$$

$$B_1^3(7) = \{7\}, B_1^3(11) = \pm \{3, 11, 13\},$$

$$B_1^3(1) = B_3(1),$$

$$O_2(C_1^3) = O_2(C_3) X_7, |O_2(C_1^3)| = q^{46},$$

$$C_1^3 = O_2(C_1^3) L_{32}, |C_1^3| = q^{55} (q^2 - 1) (q^4 - 1) (q^6 - 1) \dots$$

Wir entnehmen etwa aus [5], daß $C_1/O_2(C_1)$ genau 7 Klassen von Involutionen hat, und daß $\bar{v}_1^4(o), \bar{v}_1^9(o), \bar{v}_1^{12}(o), \bar{v}_1^{14}(o), \bar{v}_1^{15}(o), \bar{v}_1^{16}, \bar{v}_1^{17}$ Vertreter dieser Klassen sind.

Genau $q+1$ Klassen von Involutionen in C_1 haben nicht-trivialen Schnitt mit der Nebenklasse $x_{21}(1)O_2(C_1)$.

Es sind dies die Klassen mit den Vertretern $v_1^h(\alpha), \alpha \in \mathbb{F}$ und v_1^j , $j=5,6,7,8$.

$$4) v_1^h(o) \sim_E v_1, v_1^h(\lambda) \sim_E v_2 \text{ für } \lambda \neq o,$$

$$W_1^h = \langle w_1 \rangle \times \langle w_3, w_4, w_5, w_6 \rangle,$$

$$B_1^h(21) = \{21\}, B_1^h(2) = \{2, 12, 13, 14, 22, 23, 24, 29\} \cup \{8, \dots, 11, 18, 19, 20, 28\},$$

$$F_1^L(7) = \{7, 41, 42, 43, 46, 47, 48, 52\},$$

$$B_1^L(33) = \{33, 37, 56, 57, 58, 61, 62, 63\},$$

$$B_1^L(44) = \{34, 35, 36, 44, 53, 54, 55, 60\} \cup \{38, 39, 40, 45, 49, 50, 51, 59\},$$

$$E_1^h(1) = \pm \{1\},$$

$$E_1^L(3) = \pm \{3, \dots, 6, 15, 16, 17, 25, 26, 27, 30, 31\},$$

$$C_2(C_1^h) = \prod X_j, \quad j \in \{21, 32\} \cup E_1^L(2) \cup F_1^L(33) \cup B_1^L(44),$$

$$|O_2(C_1^h)| = q^{L_2},$$

$$C_1^L = O_2(C_1^h)L_1^L(1)L_1^L(2),$$

$$L_1^h(1) = X_1^h W_1 \langle w_1 \rangle X_1 \cong \text{GL}(2, q),$$

$$L_1^L(2) = U_1^L(2)W_2 \dots U_1^L(2)U_1^L(2) \cong D_4(q),$$

$$U_1^L(2) = \langle \prod X_i, j \in F_1^h(3), j > 0 \rangle, \quad W_1^h(2) = \langle w_3, \dots, w_6 \rangle,$$

$$|C_1^h| = q^{55(q^2-1)^2 \cdot (q^4-1)^2 (q^6-1)}.$$

$$5) v_1^5 \sim_E v_2, W_1^5 = \langle w_3, w_4, w_6 \rangle,$$

$$E_1^5(3) = \pm \{3, 4, 6, 15, 30, 31\},$$

$$|O_2(C_1^5)| = q^{42}, C_1^5 = O_2(C_1^5) L_1^5 \{h_2(2)h_5(2^{-1}), 2 \in K^{\times}_2\},$$

$$L_1^5 = J_1^5 H_3 H_4 H_6 W_1^5 U_1^5(1) = SL(4, q), U_1^5(1) = (\prod X_j, j \in B_1^5(3), j > 0),$$

$$|C_1^5| = q^{54}(q-1)(q^2-1)(q^3-1)(q^4-1).$$

$$6) v_1^6 \sim_E v_3, W_1^6 = \langle w_1 w_5, w_3, w_6 \rangle \cong E_8,$$

$$|O_2(C_1^6)| = q^{50}, C_1^6 = O_2(C_1^6)(L_1^6(1) \times L_1^6(2) \times L_1^6(3)),$$

$$L_1^6(1) = D_{1,5} H_{1,5} \langle w_1 w_5 \rangle D_{1,5} \cong SL(2, q),$$

$$L_1^6(2) = X_3 H_3 \langle w_3 \rangle X_3 \cong SL(2, q),$$

$$L_1^6(3) = X_6 H_6 \langle w_6 \rangle X_6 \cong SL(2, q),$$

$$|C_1^6| = q^{53}(q^2-1)^3.$$

$$7) v_1^7 = v_4, W_1^7 = \langle w_4, w_3 w_6 \rangle, (w_4 w_3 w_6)^4 = 1,$$

$$B_1^7(4) = \pm \{4, 30\}, B_1^7(45) = \{45\},$$

$$B_1^7(2) = \{2, 12, 13, 29\}, B_1^7(7) = \{7, 46, 47, 48\},$$

$$B_1^7(3) = \pm \{3, 6, 15, 31\},$$

$$O_2(C_1^7) = O_2(C_4) X_{45} D_{2,7} D_{12,48} D_{13,47} D_{29,46},$$

$$|O_2(C_1^7)| = q^{47},$$

$$C_1^7 = O_2(C_1^7) L_1^7, L_1^7 = U_1^7(1) H_{3,6} W_1^7 U_1^7(1) \cong Sp_4(q),$$

$$U_1^7(1) = X_4 X_{30} D_{3,6} D_{15,31},$$

$$|C_1^7| = q^{51}(q^2-1)(q^4-1).$$

$$8) v_1^8 = v_5, W_1^8 = \langle w_5, w_4, w_3 w_6 \rangle,$$

$$E_1^8(4) = \pm \{4, 5, 17, 25, 26, 30\},$$

$$B_1^8(38) = \{38, 39, 45, 49, 50, 59\},$$

$$B_1^8(7) = \{7, 41, 42, 43, 46, 47, 48, 52\},$$

$$B_1^8(2) = \{2, 12, 13, 14, 22, 23, 24, 29\},$$

$$B_1^8(3) = \pm \{3, 6, 15, 31, 16, 27\},$$

$$E_1^8(40) = \pm \{40, 51\},$$

$$|O_2(C_1^6)| = q^{42}, \quad C_1^6 = O_2(C_1^6) \cdot L_1^6,$$

$$L_1^6 = U_1^3(1) H_5 H_6 H_7, \quad W_1^6 U_1^3(1) \cong \text{Sp}_6(q),$$

$$U_1^6(1) = \langle X_j, j \in B_1^6(4), j > 0 \rangle D_3, 6^D_{15}, 31^D_{16}, 27^D,$$

$$|C_1^6| = q^{51} (q^2 - 1) (q^4 - 1) (q^6 - 1).$$

Es gibt genau $2+q$ Klassen von Involutionen in C_1 , mit
Vertretern $v_1^9, v_1^{10}, v_1^{11}$, die die Nebenklasse

$x_{19}(1)x_{24}(1)O_2(C_1)$ nichttrivial schneiden.

$$9) v_1^9(o) \sim_E v_2, \quad v_1^9(1) \sim_E v_3, \quad W_1^9 = \langle w_5 \rangle \times \langle w_6 \rangle \times \langle w_2, w_1 w_3 \rangle,$$

$$B_1^9(1) = \pm \{1, 3, 8, 12\},$$

$$B_1^9(62) = \{49, 53, 56, 59, \dots, 62\},$$

$$B_1^9(33) = \{33, 63\},$$

$$B_1^9(55) = \{35, 40, 50, 55\},$$

$$B_1^9(57) = \{36, 37, 39, 42, 51, 52, 54, 57\},$$

$$B_1^9(2) = \pm \{2, 9\},$$

$$|O_2(C_1^9)| = q^{43}, \quad C_1^9 = O_2(C_1^9) (L_1^9(1) \times L_1^9(2) \times L_1^9(3)),$$

$$L_1^9(1) = X_5 H_5 \langle w_5 \rangle X_5 \cong \text{SL}(2, q), \quad L_1^9(2) = X_6 H_6 \langle w_6 \rangle X_6 \cong \text{SL}_2(q),$$

$$L_1^9(3) = U_1^9(3) H_2 H_{1,3} \langle w_2, w_1 w_3 \rangle U_1^9(3) \cong \text{Sp}_4(q),$$

$$U_1^9(3) = X_2 X_9 D_{1,3} D_{8,12},$$

$$|C_1^9| = q^{49} (q^2 - 1)^3 (q^4 - 1).$$

$$10) v_1^{10} \sim_E v_3, \quad W_1^{10} = \langle w_5 \rangle \times \langle w_1 w_3 \rangle,$$

$$|O_2(C_1^{10})| = q^{46}, \quad C_1^{10} = O_2(C_1^{10}) (L_1^{10}(1) \times L_1^{10}(2) \times h_2(2) h_6(\lambda) | \lambda \in K^{\times}),$$

$$L_1^{10}(1) = X_5 H_5 \langle w_5 \rangle X_5 \cong \text{SL}(2, q),$$

$$L_1^{10}(2) = D_{1,3} H_{1,3} \langle w_1 w_3 \rangle D_{1,3} \cong \text{SL}(2, q),$$

$$|C_1^{10}| = q^{48} (q-1) (q^2-1)^2.$$

$$\begin{aligned}
 11) \quad v_1^{11} &\sim_E v_4, \quad v_1^{11} = \langle w_5, w_2 w_6 \rangle, \quad |O_2(C_1^{11})| = q^{45}, \\
 C_1^{11} &= O_2(C_1^{11})(L_1^{11}(1) \times L_1^{11}(2)), \\
 L_1^{11}(1) &= X_5 F_5 \langle w_5 \rangle X_5 \cong SL(2, q), \\
 L_1^{11}(2) &= D_{2,6} H_{2,6} \langle w_2 w_6 \rangle D_{2,6} \cong SL(2, q), \\
 |C_1^{11}| &= q^{47} (q^2 - 1)^2.
 \end{aligned}$$

Es gibt 17 Klassen von Involutionen in C_1 , mit Vertretern v_1^{12} und v_1^{13} , die die Nebenklasse $x_{11}(1)x_{22}(1)x_{26}(1)O_2(C_1)$ nichttrivial schneiden.

$$12) \quad v_1^{12}(o) \sim_E v_5, \quad v_1^{12}(1) \sim_E v_4, \quad w_1^{12} = \langle w_1 w_6, w_2 w_4, w_3 \rangle.$$

W_1^{12} ist Weylgruppe vom Typ B_3 zum folgenden Dynkindiagramm:



$$\begin{aligned}
 \text{Es gilt } |O_2(C_1^{12})| &= q^{36}, \quad C_1^{12} = O_2(C_1^{12})L_1^{12}, \\
 L_1^{12} &= U_1^{12}(1)H_{1,6}H_{2,4}H_3W_1^{12}U_1^{12}(1) \cong Sp_5(q), \\
 U_1^{12}(1) &= X_3X_{13}X_{28}D_{1,6}D_{2,4}D_{8,31}D_{9,30}D_{10,29}D_{12,15}, \\
 |C_1^{12}| &= q^{45}(q^2-1)(q^4-1)(q^6-1).
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 13) \quad v_1^{13} &\sim_E v_4, \quad w_1^{13} = \langle w_1 w_6, w_2 w_4 \rangle, \\
 |O_2(C_1^{13})| &= q^{41}, \quad C_1^{13} = O_2(C_1^{13})L_1^{13}, \\
 L_1^{13} &= U_1^{13}(1)H_{1,6}H_{2,4} \langle w_1 w_6, w_2 w_4 \rangle U_1^{13}(1) \cong SL(3, q), \\
 U_1^{13}(1) &= D_{1,6}D_{2,4}D_{8,31}, \quad |C_1^{13}| = q^{44}(q^2-1)(q^3-1).
 \end{aligned}$$

Für alle $j \in \{1, 2, \dots, 17\}$ gilt $Z(U_1^j) = Z_2(U)Y_j$,

wobei Y_j eine elementar abelsche Gruppe der Ordnung q ist, die v_1^j bzw. $v_1^j(\infty)$ enthält.

$1^k) v_1^{1^k}(0) \sim_F v_2, v_1^{1^k}(1) \sim_F v_5$. Die Gruppe $W_1^{1^k}$ mit $W_1^{1^k} = \langle w_2, w_3, w_4, w_5, w_6 \rangle$ ist Weylgruppe vom Typ B_4 zum folgenden Dynkin-Diagramm:



$$B_1^{1^k}(33) = \{33, 37, 44, 53, 58, 60, 63\},$$

$$B_1^{1^k}(1) = \{1, 3, 10, 18, 20, 21\}, R_1^{1^k}(11) = \{11, 28\},$$

$$B_1^{1^k}(2) = \{2, 4, 12, 13, 15, 22, 27\},$$

$$R_1^{1^k}(5) = \{5, 6, 14, 16, 17, 29, 31\},$$

$$O_2(C_1^{1^k}) = \prod X_j, j \in B_1^{1^k}(32) \cup B_1^{1^k}(33) \cup B_1^{1^k}(1) \cup B_1^{1^k}(11),$$

$$|O_2(C_1^{1^k})| = q^{27}, C_1^{1^k} = O_2(C_1^{1^k})L_1^{1^k},$$

$$L_1^{1^k} = \langle x_1^{1^k}, x_2, x_3, x_4, D_5, 6 \rangle \cong \text{Sp}_9(q),$$

$$L_1^{1^k} \cap U = \{ \prod x_j, j \in B_1^{1^k}(2), j > 0 \} D_5, 6^{D_{14}}, 29^{D_{16}}, 30^{D_{17}}, 31,$$

$$|C_1^{1^k}| = q^{k^3}(q^2-1)(q^k-1)(q^6-1)(q^2-1)$$

$$15) v_1^{15}(0) \sim_F v_3, v_1^{15}(1) \sim_F v_4, v_1^{15} = \langle w_2 \rangle \times \langle w_4, w_5, w_6 \rangle,$$

$$B_1^{15}(33) = \{33, 58, 62, 63\}, B_1^{15}(61) = \{36, 37, 53, 54, 56, 57, 60, 61\}$$

$$B_1^{15}(3) = \{3, 12, 13, 15, 22, 23, 25, 26\},$$

$$B_1^{15}(9) = \{9, 10, 18, 19\},$$

$$O_2(C_1^{15}) = \left(\prod X_j, j \in B_1^{15}(33) \cup B_1^{15}(61) \cup B_1^{15}(3) \cup B_1^{15}(9) \right)$$

$$x_3 x_{11} x_{24} x_{28} x_{20} x_{21}^{D_{35}}, 49^{D_{34}}, 50^{D_{40}}, 44^{D_{55}}, 59$$

$$D_{14}, 39^{D_{16}}, 30^{D_{17}}, 29$$

$$|O_2(C_1^{15})| = q^{36}, C_1^{15} = O_2(C_1^{15})(L_1^{15}(1) \times L_1^{15}(2)),$$

$$L_1^{15}(1) = \langle x_2, w_4 \rangle \cong \text{Sp}_2(q),$$

$$L_1^{15}(2) = \langle w_4, w_5, w_6, x_{11}, D_5, 6 \rangle \cong \text{Sp}_4(q),$$

$$U \cap L_1^{15}(3) = x_{11} x_{27}^{D_5}, 6^{D_{17}}, 31,$$

$$|C_1^{15}| = q^{k^3}(q^2-1)^2(q^k-1)$$

$$\begin{aligned}
 16) \quad v_1^{16} &\sim_E v_3, \quad w_1^{16} = \langle w_1 w_5, w_2 w_4, w_3 \rangle, \\
 F_1^{16}(33) &= \{33\}, \quad B_1^{16}(53) = \{53, 57, 59\}, \\
 B_1^{16}(63) &= \{49, 52, 54, 56, 58, 60, 63\}, \\
 F_1^{16}(6) &= \{6, 18, 21, 23, 25, 27, 29, 31\}, \\
 B_1^{16}(22) &= \{22, 26, 28\}, \\
 B_1^{16}(1) &= \{1, 2, 4, 5, 8, 10, 12, 14, 17\}, \\
 O_2(C_1^{16}) &= (\prod X_j, j \in B_1^{16}(63) \cup B_1^{16}(6) \cup B_1^{16}(22)) \cdot \\
 &\quad X_{32} X_{33} D_{53, 57} D_{53, 59}, \\
 |O_2(C_1^{16})| &= q^{31}, \\
 C_1^{16} &= O_2(C_1^{16}) L_1^{16}, \\
 L_1^{16} &= \langle w_1^{16}, D_{1,5} D_{2,4} X_3 \rangle \cong Sp_5(q), \\
 U \cap L_1^{16} &= X_3 X_{11} X_{13} D_{1,5} D_{2,4} D_{8,17} D_{9,16} D_{10,14} D_{12,15}, \\
 |C_1^{16}| &= q^{40} (q^2 - 1) (q^4 - 1) (q^6 - 1).
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 17) \quad v_1^{17} &\sim_E v_4, \quad w_1^{17} = \langle w_3, w_2 w_4 \rangle, \\
 B_1^{17}(33) &= \{33\}, \quad B_1^{17}(63) = \{60, 63\}, \\
 B_1^{17}(58) &= \{54, 55, 56, 58\}, \\
 F_1^{17}(18) &= \{18, 21\}, \quad B_1^{17}(23) = \{23, 25, 27\}, \\
 O_2(C_1^{17}) &= (\prod X_j, j \in B_1^{17}(63) \cup B_1^{17}(58) \cup B_1^{17}(18) \cup B_1^{17}(23)) \cdot \\
 &\quad X_{32} X_{33} D_{34, 52} D_{35, 51} D_{36, 50} D_{37, 40} D_{53, 57} D_{53, 59} \\
 &\quad X_{11} X_{22} X_{26} X_{20} D_{1,5} D_{1,6} D_{10,14} D_{10,20} \\
 &\quad D_{8,17} D_{8,31} D_{9,16} D_{9,30}, \\
 |O_2(C_1^{17})| &= q^{36}, \\
 C_1^{17} &= O_2(C_1^{17}) L_1^{17}, \quad L_1^{17} = \langle w_3, w_2 w_4, X_3, D_{2,4} \rangle \cong Sp_4(q), \\
 U \cap L_1^{17} &= X_3 X_{13} D_{2,4} D_{12,15}, \\
 |C_1^{17}| &= q^{40} (q^2 - 1) (q^4 - 1).
 \end{aligned}$$

Teil 2. Die Kennzeichnung der Gruppen $E_7(2^n)$

Es soll nun der in der Einleitung formulierte Satz bewiesen werden. Künftig bezeichne G eine Gruppe, die den Voraussetzungen des Satzes genügt. Wir setzen $q = 2^m$, $C_1 = C_G(v_1)$ und übernehmen für die Elemente aus C_1 die Bezeichnungen von Teil 1.

§1. Über die 2-Struktur und die Fusion der Involutionen in G .

Lemma 1 Es gilt $N_G(U) \leq N_G(C_1)$ und die Gruppe $N_G(U)$ enthält eine Sylow-2-Untergruppe von G . Es gibt eine Sylow-2-Untergruppe $U \langle T \rangle$ von G , wobei $\langle T \rangle$ eine Gruppe von Körperautomorphismen auf $C_1/O_2(C_1)$ induziert.

Die Gruppe U liegt charakteristisch in $U \langle T \rangle$.

Beweis. Wegen $Z(U) = X_{32}$ gilt offenbar $N_G(U) \leq N_G(C_1)$.

Sei nun $t \in N(U)$ und $t^2 \in U$. Dann bewirkt t einen Automorphismus auf C_1 .

Wir entnehmen aus [6], daß die äußere Automorphismengruppe A von $D_5(q)$ die folgende Gestalt hat:

$A = A_1 \times A_2$. Dabei ist A_1 isomorph zur Galoisgruppe von $GF(q)$ und A_2 ist eine Gruppe der Ordnung 2, die auf $GF(q)$ einen Graphautomorphismus bewirkt.

Wir unterscheiden die folgenden Fälle:

(1) $t \in C(C_1/O_2(C_1))$.

Wir können t so wählen, daß $[t, H_6] = 1$ gilt. Dann operiert t wegen $[Z_2(U), H_6] = X_{33}$ auf der Gruppe X_{33} , zentralisiert also ein Element $x_{33}(\alpha)$, $\alpha \neq 0$. Es folgt $[X_{33}, t] = \langle 1 \rangle$.

Weiter operiert t auf $O_2(C_1)U'/U'$, zentralisiert also eine Nebenklasse $x_7(\alpha_0)U'$, $\alpha_0 \neq 0$. Es folgt $x_7(\alpha_0)^t = x_7(\alpha_0)u'$ mit $u' \in U'$.

Sei nun $\beta \in K$. Dann gilt

$$x_{32}(\beta \alpha_0)^t = [x_{33}(\beta), x_7(\alpha_0)]^t = [x_{33}(\beta), x_7(\alpha_0)u'] = x_{32}(\beta \alpha_0). \text{ Dies ist ein Widerspruch.}$$

(2) t bewirke auf $C_1/O_2(C_1)$ keinen Körperautomorphismus.

Dann erhalten wir den Widerspruch

$$x_{33}(\alpha \beta)^t = [x_{63}(\alpha), x_6(\beta)]^t = [x_{63}(\alpha'), x_5(\beta)u]^t \in X_{32} \text{ für alle } \alpha, \beta \in K. \text{ Dabei ist } \alpha' \in K, z \in Z_2(U), u \in O_2(C_1).$$

Es folgt aus (1) und (2), daß eine Sylow-2-Untergruppe von $N(U)$ die angegebene Gestalt hat.

Wir nehmen nun an, U sei keine Sylow-2-Untergruppe von G . Dann gilt $Z(U\langle T \rangle) = C(T) \cap X_{32} \neq X_{32}$. Weiter muß $Z_2(U\langle T \rangle) \leq Z_2(U)$ sein. Die Operation von X_7 zeigt, daß $Z_k(U\langle T \rangle) = X_{32}$ gilt, $k \geq 2$. Insbesondere liegen X_{32} und U charakteristisch in $U\langle T \rangle$.

Lemma 2 Ist $U \in \text{Syl}_2(G)$, so gilt $C_U(v_i) \in \text{Syl}_2(C_G(v_i))$ für $i=1, 2, \dots, 5$.

Beweis. Dies folgt aus der Tatsache, daß X_{32} eine charakteristische Untergruppe von $C_U(v_i)$ ist.

Lemma 3 Es gibt ein $\alpha \in K^\times$ derart, daß $x_{32}(\alpha)$ in G zu $x_{33}(1)$ konjugiert ist.

Beweis. Wir nehmen an, die Behauptung des Lemmas sei falsch.'

(1) Zuerst zeigen wir, daß X_{32} in U stark abgeschlossen ist bezüglich G . In Teil 1 haben wir die Elemente v_1^j mit $j \in J_0$ und $v_1^j(\beta)$ mit $\beta \in K, j \in J_1$ als Vertreter der Konjugiertenklassen von Involutionen in $C_1 - Z(C_1)$ eingeführt. Es gilt $U_1^j = C_U(v_1^j) \in \text{Syl}_2(C_{C_1}(v_1^j))$. Sei $U_1^j \leq S_1^j \in \text{Syl}_2(C(v_1^j) \cap N(C_1))$. Ist U keine Sylow-2-Untergruppe von G , so gilt $|K| \geq 4$ und U_1^j ist eine charakteristische Untergruppe von S_1^j .

Wir nehmen nun an, es gelte $x_{32}(\alpha) \sim_G v_1^j, j \in J_0$ oder $x_{32}(\alpha) \sim_G v_1^j(\beta), \beta \in K^x, j \in J_1$. Es gilt stets $Z(U_1^j) = Z_2(U)Y_j \cong E_q 3$.

Ist j in J_0 enthalten, so sind die Involutionen in $Z(U_1^j) - Z_2(U)$ alle in C_1 konjugiert und wir erhalten den Widerspruch $S_1^j \in \text{Syl}_2(C_G(v_1^j))$.

Ist $j \in J_1$, so gilt $[Z_2(U_1^j), U_1^j] = X_{33}$. Somit ist $X_{33} \text{ char } S_1^j$ und jede Involution y aus $Z(U_1^j) - Z_2(U)$ ist in C_1 zu allen Involutionen aus der Nebenklasse yX_{33} konjugiert. Sei jetzt $|S_1^j \langle x \rangle / S_1^j| = 2$ und $x \in C(v_1^j)$ bzw. $x \in C(v_1^j(\beta))$. Es folgt $v_1^x \in Z(U_1^j) - Z_2(U)$ und $(x_{33}(1)v_1)^x$ liegt in $v_1^x X_{33}$. Dies ergibt den Widerspruch $x_{33}(1) \sim v_1$. Die Aussage unter (1) ist bewiesen.

Ist U eine Sylow-2-Untergruppe von G , so erhalten wir einen Widerspruch zu Goldschmidts Satz [3].

Künftig nehmen wir an, U sei keine Sylow-2-Untergruppe von G .

(2) Wir wählen eine Involution t_0 aus $U \langle T \rangle / U$ derart, daß gilt

$$x_j(\alpha)^{t_0} \in x_j(\overline{\alpha}) O_2(C_1) \text{ für alle } x_j(\alpha) \in L_1.$$

Dann gilt $t_0 \in N(U)$ und $N(U) \cap C_1 \langle t_0 \rangle = U \langle t_0 \rangle H_1 H_2 \dots H_6$.

Wir wählen t_0 so, daß $t_0 \in N(H_1 \dots H_6)$ gilt. Wegen

$$[Z_2(U), H_6] = X_{33} \text{ und } [Z_3(U), H_4] = X_{63} \text{ operiert } t_0 \text{ auf}$$

X_{33} und auf X_{63} . Sei $[t_0, x_{33}(\alpha_0)] = 1$. Dann gilt

$$x_{33}(\alpha \alpha_0)^{t_0} = x_{33}(\alpha_0)^{t_0 h_6(\alpha)} = x_{33}(\alpha_0)^{h_6(\overline{\alpha})} t_0 = x_{33}(\overline{\alpha} \alpha_0)$$

für alle $\alpha \in K$.

Analog erhält man $x_{63}(\alpha \beta_0)^{t_0} = x_{63}(\overline{\alpha} \beta_0)$ für alle $\alpha \in K$.

Außerdem zentralisiert t_0 eine Nebenklasse $x_7(\gamma_0)U$.

$$\text{Es folgt } x_{32}(\alpha \alpha_0 \gamma_0)^{t_0} = [x_{33}(\alpha \alpha_0), x_7(\gamma_0)]^{t_0} =$$

$$= [x_{33}(\overline{\alpha} \alpha_0), x_7(\gamma_0)u] = x_{32}(\overline{\alpha} \alpha_0 \gamma_0).$$

(3) Es folgt aus (1) und Goldschmidts Satz, daß eine

2-zentrale Involution $x_{32}(\alpha)$ zu einer Involution t aus

$U \langle t_0 \rangle - U$ konjugiert sein muß. Folglich gibt es Involutionen

$a \in Z_2(U) - Z(U)$ und $b \in Z_3(U) - Z_2(U)$ derart, daß gilt

$aa^t \in Z(U)$ und $bb^t \in Z(U)$. Wir führen die Vierergruppe V

ein durch $V = \langle aa^t, bb^t \rangle$. Es gilt $V \leq U - Z(U)$, $[V, t] = 1$

und t ist zu allen Involutionen der Nebenklasse tV

konjugiert. Andererseits ist t zu $x_{32}(\alpha)$ konjugiert.

Das ist ein Widerspruch zu (1).

Lemma 4 Alle Involutionen $x_{32}(\alpha)$, $\alpha \in K^*$ sind zu $x_{33}(1)$ konjugiert.

Beweis. Wir wissen aus Lemma 3, daß es eine Involution

$x_{32}(\alpha)$ gibt, die zu $x_{33}(1)$ konjugiert ist. Aus der

Struktur von $U \langle T \rangle$ folgt, daß diese Konjugation schon in

$N(Z_2(U))$ stattfindet. Ist U eine Sylow-2-Untergruppe

von G , so gilt $X_{32} \cap X_{32}^n = \langle 1 \rangle$ für alle $n \in N(Z_2(U)) - N(C_1)$

und die Behauptung des Lemmas ist bewiesen. Wir nehmen an, die Behauptung sei falsch und definieren die Mengen

$$A = \{\alpha \mid \alpha \in K^\times, x_{32}(\alpha) \neq x_{33}(1)\} \cup \{0\}, \\ B = \{\beta \mid \beta \in K^\times, x_{32}(\beta) = x_{33}(1)\}.$$

Offensichtlich gilt $1 \in B$ und somit $|B| = |N(C_1)/C_1|$.

Wir setzen $N = N(Z_2(U))$ und $\bar{N} = N/C(Z_2(U))$.

Es sei $\bar{n} \in \bar{N} - \bar{N}(C_1)$, $\beta \in B$. Dann gilt $x_{32}(\beta)^{\bar{n}} \notin X_{32}$ und somit $X_{32} \cap X_{32}^{\bar{n}} = \{x_{32}(\alpha) \mid \alpha \in A\}$.

Man sieht ebenso wie im Beweis von Lemma 3, daß

$\{x_{32}(\alpha) \mid \alpha \in A\}$ in $U\langle T \rangle$ stark abgeschlossen ist. Das widerspricht der Einfachheit von G .

Da die Fusion der Elemente aus $Z(U)$ stets schon in $N(Z(U))$ stattfindet, erhalten wir

Lemma 5 (a) $|N(C_1)/C_1| = q-1$ und $U \in \text{Syl}_2(G)$.

(b) $C_1 = C_G(x_{32}(\alpha))$ für alle $\alpha \in K^\times$.

Lemma 6 Wir setzen $N = N_G(Z_2(U))$ und $\bar{N} = N/C_G(Z_2(U))$.

Es gilt $\bar{N} \cong GL_2(q)$. Die Gruppe N zerfällt über $C(Z_2(U))$ und $\bar{N}$ operiert kanonisch auf $Z_2(U)$ bezüglich der Basis $x_{32}(1), x_{33}(1)$.

Beweis. (1) Wir setzen $\bar{N} = C_{\bar{N}}(X_{32}) = C_{\bar{N}}(v_1) = \overline{N_7 N_6}$.

Aus Lemma 4 folgt $|\bar{N}| = q(q-1)(q^2-1) = |GL_2(q)|$. Wegen

$|N_{\bar{N}}(X_{32})| = q(q-1)^2$ hat X_{32} also genau $q+1$ konjugierte in $Z_2(U)$. Aus Lemma 5 (b) folgt, daß $X_{32}^{\bar{n}} \cap X_{32} = \langle 1 \rangle$ gilt für alle $\bar{n} \in \bar{N}$, $\bar{n} \notin N(X_{32})$. Es sei $X = X_{32}^{\bar{n}} + X_{32}$, $\bar{n} \in \bar{N}$.

Da X ein Komplement von $Z(U)$ in $Z_2(U)$ ist, gilt

$C_{\bar{N}}(X) \cap C_{\bar{N}}(X_{32}) = \langle 1 \rangle$. Es gilt $|C_{\bar{N}}(X)| = |C_{\bar{N}}(X_{32})| = q(q-1)$.

Wir nehmen an, es sei $1 \neq x_{33}(\alpha) \in N(X)$.

Wir wählen $x = x_{33}(\alpha_1)x_{32}(\alpha_2) \in X$, $\alpha_1 \neq 0$. Dann ist

$x_7(\alpha) = x_{33}(\tau_1) x_{32}(\tau_2 + \tau_1 \alpha) \in X$ und somit $x_{32}(\tau_1 \alpha) \in X$, ein Widerspruch.

Es folgt $N(X) \cap \overline{X_7} = \langle 1 \rangle$ und $N_{\overline{H}}(X)$ muß ein Komplement von $\overline{X_7}$ in $\overline{H}$ sein, $\overline{H} = \overline{X_7} N_{\overline{H}}(X)$. Also gilt $N_{\overline{H}}(X) = \overline{H_6}^{x_7(\alpha)}$, $\alpha \in K$.

Die Gruppe $\overline{H_6}$ operiert nur auf zweien der Untergruppen der Ordnung q von $Z_2(U)$, nämlich auf X_{32} und X_{33} .

Es folgt $X = X_{33}^{x_7(\alpha)}$.

Die Gruppen X_{32} und $X_{33}^{x_7(\alpha)}$, $\alpha \in K$ sind also die

sämtlichen 2-zentralen Untergruppen der Ordnung q von $Z_2(U)$. Weiter gilt $|N_{\overline{H}}(X)/C_{\overline{H}}(X)| = q-1$ und $\overline{H_6}^{x_7(\alpha)}$ ist

ein Komplement von $C_{\overline{H}}(X)$ in $N_{\overline{H}}(X)$. Folglich zerfällt

auch $N_{\overline{H}}(X_{32})$ über $C_{\overline{H}}(X_{32})$. Wegen $|N_{\overline{H}}(X_{32}) \cap N_{\overline{H}}(X_{33})| = (q-1)^2$ folgt $N_{\overline{H}}(X_{32}) = \overline{X_7 H_6} (C_{\overline{H}}(X_{33}) \cap N_{\overline{H}}(X_{32}))$.

Wir setzen $\widetilde{H_7} = C_{\overline{H}}(X_{33}) \cap N_{\overline{H}}(X_{32})$. Es ist $[\overline{H_6}, \widetilde{H_7}] = \langle 1 \rangle$

und $\overline{H_6} \cong \widetilde{H_7} \cong Z_{q-1}$. Wir bestimmen ein Element $\overline{w_7} \in \overline{N}$,

welches $X_{32}^{\overline{w_7}} = X_{33}$ erfüllt. Indem wir nötigenfalls $\overline{w_7}$

durch $\overline{w_7 x_7(\alpha)}$ ersetzen, können wir erreichen, daß

$X_{33}^{\overline{w_7}} = X_{32}$ gilt. Weiter können wir erreichen, daß

$v_1^{\overline{w_7}} = x_{33}(1)$ gilt. Dann ist $\overline{w_7}^2 = 1$.

Die Involution $\overline{w_7}$ zentralisiert eine Untergruppe der Ordnung q von $Z_2(U)$, die $x_{32}(1)x_{33}(1)$ enthält. Da jede

Involution aus $\overline{H}$ in $Z_2(U)$ gerade eine 2-zentrale

Untergruppe der Ordnung q zentralisiert, gilt

$C(\overline{w_7}) \cap Z_2(U) = X_{33}^{x_7(1)}$ und somit

$\overline{w_7} : x_{32}(\alpha) \rightarrow x_{33}(\alpha)$ für alle $\alpha \in K$.

Wir setzen $\widetilde{h_7}(\alpha) = \overline{h_6(\alpha)}^{\overline{w_7}}$, $\overline{h_7}(\alpha) = \overline{h_5(\alpha)} \widetilde{h_7}^{-1}(\alpha)$

für alle $\alpha \in K$.

Bezüglich der Basiss $x_{32}(1), x_{33}(1)$ sind den Erzeugenden von $\bar{N}$ die folgenden Matrizen zugeordnet:

$$\begin{aligned} \overline{h_7(\lambda)} &\rightarrow \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda^{-1} \end{pmatrix} & \overline{x_7(\alpha)} &\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \alpha & 1 \end{pmatrix} & \overline{w_7} &\rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \\ \overline{h_6(\lambda)} &\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Das zeigt, daß die Gruppe $\langle \overline{X_7}, \overline{H_7}, \overline{w_7} \rangle$ isomorph ist zu $SL_2(q)$ und daß $\bar{N} \cong GL_2(q)$ gilt.

(2) Betrachte $\tilde{N} = N/O_2(C(Z_2(U)))$. Wegen $\tilde{L}_1^1 \triangleleft \tilde{N}$ und da

L_1^1 von X_7 zentralisiert wird, muß $\tilde{N}$ die folgende

Gestalt haben: $\tilde{N} = (\tilde{Y} \times \tilde{L})\tilde{H}_6$ mit $\tilde{Y} \cong SL_2(q)$, $\tilde{Y} = \langle \overline{X_7}, \overline{w_7} \rangle$.

Sei Y das volle Urbild von $\tilde{Y}$.

Es ist $C(L_1^1) \cap O_2(C(Z_2(U))) = Z_2(U)$. Wegen $[X_7, L_1^1] = \langle 1 \rangle$ folgt $C_Y(L_1^1)/Z_2(U) \cong SL_2(q)$. Nach einem Satz von Gaschütz[2] zerfällt $C_Y(L_1^1)$ über $Z_2(U)$. Nun ist klar, daß auch N über $C(Z_2(U))$ zerfällt.

Definition 1 Nach Lemma 6 können wir in einem Komplement M von $C(Z_2(U))$ in $N(Z_2(U))$, das X_7 enthält, Elemente $h_7(\lambda)$, $\lambda \in K^\times$ und w_7 finden, deren Operation auf $Z_2(U)$ bezüglich der Basis $x_{32}(1), x_{33}(1)$ die folgenden Matrizen zugeordnet sind:

$$h_7(\lambda) \rightarrow \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda^{-1} \end{pmatrix} \quad w_7 \rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Wir definieren $H_7 = \{h_7(\lambda), \lambda \in K^\times\}$, $G_0 = \langle C_1, w_7 \rangle$,

$M = \langle X_7, w_7 \rangle$, $E = N_G(U)$, $H = \langle H_1, H_2, \dots, H_7 \rangle$, $W = \langle w_1, \dots, w_7 \rangle$.

Dann gilt $H_7 \cong Z_{q-1}$, $M \cong SL_2(q)$ und $N_G(C_1) = C_1 H_7$.

§2. Eine Untergruppe isomorph zu $E_7(q)$.

In diesem Paragraphen soll der folgende Satz bewiesen werden

Satz 1 G_0 ist isomorph zu $E_7(q)$.

Zum Beweis konstruieren wir ein BN-Paar im Sinne von Tits [8], das G_0 erzeugt. Die Identifikation mit $E_7(q)$ erfolgt durch einen Satz von Tits [7].

Zuerst betrachten wir die Gruppe $E_1(M \times L_1^1)$, wobei $E_1 = Z_2(U)E_2$ und $E_2 = \prod X_j, j \in B_1^1(63)$ sei. Es gilt $E_1 \cong E_q^{17}$. Wegen $[E_1, L_1^1] = E_2$ operiert M auf E_2 . Da E_2 von X_7 zentralisiert wird, folgt $[E_2, M] = \langle 1 \rangle$.

Wir haben $[H_7, H_1 \dots H_6] = \langle 1 \rangle$. Da H_7 auf X_7 und auf $O_2(C(Z_2(U)))$ operiert und wegen $[H_7, L_1^1] = \langle 1 \rangle$ gilt $H_7 \leq N(U)$. Somit gilt $N_G(U) = UH$.

Weiterhin gilt $[w_7, \langle w_1, \dots, w_5 \rangle] = \langle 1 \rangle$.

Wir betrachten nun die Gruppe $Z_3(U)$ und setzen

$N_1 = N_G(Z_3(U))$, $\overline{N}_1 = N_1/C(Z_3(U))$. Alle Involutionen in $Z_3(U)$ sind unter $\overline{N}_1$ konjugiert. Wegen $|C_{\overline{N}_1}(v_1)| = q^3(q^2-1)(q-1)$

folgt $|\overline{N}_1| = |GL_3(q)|$ und somit

$$\overline{N}_1 \cong \langle \overline{X}_6, \overline{X}_7, \overline{w}_6, \overline{w}_7, \overline{H}_4 \rangle \cong GL_3(q),$$

$$\overline{M}_1 = \langle \overline{X}_6, \overline{X}_7, \overline{w}_6, \overline{w}_7 \rangle \cong SL_3(q).$$

Es gilt $C(Z_3(U)) \cap \langle w_1, \dots, w_6 \rangle = \langle w_1, w_2, w_3 \rangle \times \langle w_5 \rangle$.

Wir geben einige Bahnen dieser Gruppe bei der Operation auf $\overline{Q}$ an:

$$B(10) = \{4, 10, 11, 13, 14, 15, 16, 17\}$$

$$B(18) = \{18, 22, 25, 27, 28, 29, 30, 31\}$$

$$B(21) = \{19, 20, 21, 23, 24, 26\}$$

$$B(34) = \{34, 38, 41, 43, 44, 45, 46, 47\}$$

$$B(37) = \{35, 36, 37, 39, 40, 42\}$$

$$B(49) = \{49, 53, 56, 58, 59, 60, 61, 62\}$$

$$B(57) = \{50, 51, 52, 54, 55, 57\}.$$

$$\text{Es ist } O_2(C_G(Z_3(U))) = Z_3(U) \prod X_j, j \in B(10) \cup B(18) \cup B(21) \cup$$

$$B(34) \cup B(37) \cup B(49) \cup B(57),$$

$$|O_2(C_G(Z_3(U)))| = q^{53}, C_G(Z_3(U)) = O_2(C_G(Z_3(U))) (G_1 \times G_2),$$

$$\text{wobei } G_1 = \langle X_1, X_2, X_3, w_1, w_2, w_3 \rangle \cong SL_4(q) \text{ und}$$

$$G_2 = \langle X_5, w_5 \rangle \cong SL_2(q) \text{ gilt.}$$

$$\text{Setzen wir } X = Z_2(O_2(C_G(Z_3(U)))) = Z_3(U) \prod X_j,$$

$$j \in \{53, 56, 58, 60, 61, 62\}.$$

$$\tilde{X} = X/Z_3(U), \text{ so gilt } C(\tilde{X}) \cap C_G(Z_3(U)) = O_2(C_G(Z_3(U))),$$

$$\text{und somit } (C(\tilde{X}) \cap N_1)/O_2(C_G(Z_3(U))) = \langle X_6, X_7, w_6, w_7 \rangle$$

$$\text{modulo } O_2(C_G(Z_3(U))).$$

$$\text{Setze } Y = C(\tilde{X}) \cap N_1, \bar{Y}_1 = C(Z_3(U))/O_2(C(Z_3(U))), Y_2 = C_Y(\bar{Y}_1).$$

$$\text{Es gilt } Y_2 \cap O_2(C(Z_3(U))) = Z_3(U) \text{ und } Y_2/Z_3(U) \cong SL_3(q).$$

$$\text{Da } Z_3(U)X_6X_7X_{48} \in \text{Syl}_2(Y_2) \text{ ist, zerfällt } Y_2 \text{ über } Z_3(U).$$

$$\text{Insbesondere folgt } (w_6w_7)^3 = 1 \text{ und } W \leq N(H).$$

Lemma 1 Setze $\Omega = \mathbb{F}^+ - \{7\}$. Dann operiert w_7 auf Ω

$$\text{wie in Tabelle 2 von Teil 1 angegeben.}$$

$$\text{Beweis. Wir haben schon gezeigt, da\ss } \langle X_7, w_7 \rangle \text{ die Gruppen}$$

$$L_1^1 \text{ und } \prod X_j, j \in \{49, 50, \dots, 63\} \text{ zentralisiert. Au\ss erdem}$$

$$\text{operiert } \langle X_7, w_7 \rangle \text{ auf } O_2(C(Z_2(U))) \text{ und es ist}$$

$$O_2(C_G(Z_2(U))) = O_2(C(Z_2(U)))' (\prod X_j, j \in \{34, \dots, 48\})$$

$$(\prod X_j, j \in \{6, 18, \dots, 31\}).$$

$$\text{Aus der Struktur von } N(Z_3(U)) \text{ wissen wir, da\ss}$$

$$x_6(\alpha)^{w_7} = x_{48}(\alpha) \text{ gilt f\ur } \text{ur alle } \alpha \in K.$$

Da die Gruppe $\langle w_1, w_2, \dots, w_5 \rangle$ von w_7 zentralisiert wird und auf den Mengen $\{34, \dots, 48\}$ und $\{6, 18, \dots, 31\}$

transitiv operiert, ist die Operation von w_7 auf $\{6, 18, \dots, 31, 34, \dots, 48\}$ eindeutig bestimmt. q.e.d.

Die Gruppe V_1^1 mit $V_1^1 = \prod X_{-j}, j \in \{1, \dots, 6, 8, \dots, 31\}$ ist eine Sylow-2-Untergruppe von L_1^1 und wir haben die Gruppen X_{-7} und X_{-48} definiert durch $X_{-7} = X_7^{w_7}$ und $X_{-48} = X_{-6}^{w_7}$.

Nun definieren wir elementar abelsche Untergruppen X_{-i} der Ordnung q von G_0 für $i \in \{32, \dots, 47, 49, \dots, 63\}$ und bestimmen die Operation der Erzeugenden von W auf $\langle U, X_{-i} \mid i \in \{1, \dots, 63\} \rangle$.

Ist $w \in W$ und gilt $x_i(\alpha)^w = x_j(\alpha)$ für alle $\alpha \in K$, so schreiben wir abkürzend $X_i^w = X_j$ oder auch $w(i) = j$.

Wir setzen $B = \{34, \dots, 48\}$, $B' = \{18, \dots, 31, 6\}$.

Dann sind B , B' und $-B'$ Bahnen unter der Operation von $\langle w_1, \dots, w_5 \rangle$. Da $\langle w_1, \dots, w_5 \rangle$ von w_7 zentralisiert wird, können wir die Gruppen X_{-i} für $i \in B$ definieren durch $X_{-i} = X_{-j}^{w_7}$ für $j \in B'$ und $w_7(j) = i$.

Die Operation eines Elementes $w \in \langle w_1, \dots, w_5 \rangle$ auf $-B$ wird beschrieben durch $w(-i) = -w(i)$, $i \in B$.

Für $i \in \{1, 2, \dots, 7\}$ und $j \in \{1, \dots, 63\} \cup \{-1, \dots, -31,$

$$-34, \dots, -48\} = J$$

haben wir, mit Ausnahme der Situation $i=6$, $j \in \{-34, \dots, -47\}$, gezeigt, daß $w_i(j) \in J$ gilt.

Sei jetzt $i \in \{34, 38, 41, 43, \dots, 47\}$.

Dann gilt $-i = w_7(-j)$, $j \in \{18, 22, 25, 27, \dots, 31\}$ und es folgt

$$[X_{-i}, w_6] = [X_{-j}^{w_7}, w_6] = [X_{-j}, w_7 w_6 w_7]^{w_7} = [X_{-j}, w_6 w_7 w_6]^{w_7} = 1.$$

Sei nun $i \in \{35, 36, 37, 39, 40, 42\} = B_1$.

Es gilt $w_6(B_1) = \{55, 54, 57, 51, 50, 52\}$.

Für $i \in B_1$ und $w_6(i) = j$ setzen wir $X_{-j} = X_{-i}^{w_6}$.

Es sei nun $i \in w_6(B_1)$. Wegen $[\langle w_1, w_2, w_3, w_5 \rangle, w_6] = 1$ gilt $w(-i) = -w(i)$ für alle $w \in \langle w_1, w_2, w_3, w_5 \rangle$.

Weiter gilt $[X_{-i}, w_7] = [X_{-j}^{w_6}, w_7] \quad (j \in B_1)$
 $= [X_{-j}, w_6 w_7 w_6] = [X_{-j}, w_7 w_6 w_7]^{w_6} = 1.$

Ebenso erhält man $[w_4, X_{-51} X_{-52} X_{-55}] = 1.$

Wir setzen $X_{-49} = X_{-50}^{w_4}$, $X_{-53} = X_{-54}^{w_4}$, $X_{-56} = X_{-57}^{w_4}$.

Die Gruppe $\langle w_1, w_2, w_7 \rangle$ operiert wegen $[\langle w_1, w_2, w_7 \rangle, w_4] = 1$ auf $\{-49, -53, -56\}$ vermöge $w(-i) = -w(i)$ für

$$w \in \langle w_1, w_2, w_7 \rangle.$$

Sei $i \in \{49, 53, 56\}$. Es gilt

$$\begin{aligned} w_6(-i) &= w_6 w_4(-j) \quad , \quad j \in \{50, 54, 57\} \\ &= w_4 w_6 w_4(-j) = w_4 w_6 w_4(-k) \quad , \quad k \in \{40, 36, 37\} \\ &= w_4 w_6(-k) = w_4(-j) = -i. \end{aligned}$$

Ebenso erhält man $[w_3, X_{-49} X_{-53}] = 1$ sowie

$$w_3(-56) = w_4 w_3(-56) \text{ und } w_5(-i) = w_4 w_5(-i), \quad i \in \{49, 53, 56\}$$

$$\begin{aligned} \text{Wir setzen } X_{-58} &= X_{-56}^{w_3}, \quad X_{-59} = X_{-49}^{w_5}, \quad X_{-60} = X_{-53}^{w_5} \text{ und} \\ &X_{-61} = X_{-56}^{w_5}. \end{aligned}$$

Dann gilt $[X_{-i}, w_4] = 1$ für $i \in \{58, 59, 60, 61\}$.

$$\begin{aligned} \text{Wir haben } w_2(-58) &= w_2 w_3(-56) = w_3 w_2 w_3 w_2(-56) = w_3 w_2 w_3(-53) \\ &= w_3 w_2(-53) = w_3(-56) = -58. \end{aligned}$$

Für $i \in \{1, 2, \dots, 7\}$ und $j \in \{58, 59, 60, 61\}$ haben wir, mit Ausnahme der beiden Fälle $i=5, j=58$ und $i=3, j=61$, gezeigt, daß $w_i(-j) \in \{-49, -53, -56, -58, \dots, -61\}$ gilt.

$$\begin{aligned} \text{Wir setzen } -62 &= w_5(-58) = w_3(-61) = w_3 w_5(-56) \text{ und} \\ -63 &= w_4(-62). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Es gilt } w_3(-63) &= w_3 w_4(-62) = w_4 w_3 w_4 w_3(-62) = w_4 w_3 w_4(-61) \\ &= w_4 w_3(-61) = w_4(-62) = -63, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} w_5(-63) &= w_5 w_4(-62) = w_4 w_5 w_4 w_5(-62) = w_4 w_5 w_4(-58) \\ &= w_4 w_5(-58) = w_4(-62) = -63. \end{aligned}$$

und wir setzen $-33 = w_6(-63)$.

$$\begin{aligned} \text{Weiter gilt } w_4(-33) &= w_4 w_6(-63) = w_6 w_4 w_6 w_4(-63) = \\ &= w_6 w_4 w_6(-62) = w_6 w_4(-62) = w_6(-63) = -33. \end{aligned}$$

Wir setzen $-32 = w_7(-33)$.

Wir erhalten $[X_{-32}, w_j] = \langle 1 \rangle$ für $j \in \{1, \dots, 5\}$ und

$$\begin{aligned} w_6(-32) &= w_6 w_7(-33) = w_7 w_6 w_7 w_6(-33) = w_7 w_6 w_7(-63) = \\ &= w_7 w_6(-63) = w_7(-33) = -32. \end{aligned}$$

Damit ist das folgende Ergebnis bewiesen:

Lemma 2 Wir haben die Untergruppen X_{-j} , $j \in \{1, \dots, 63\}$ von G_0 definiert und es gilt $X_{-j} \cong E_q$.

Die Elemente w_i , $i \in \{1, 2, \dots, 7\}$ operieren auf $\langle U, X_{-j} \mid j=1, 2, \dots, 63 \rangle$ wie in Tabelle 2 von Teil 1 angegeben, d.h.

$$\begin{aligned} x_{-j}(\alpha)^{w_i} &= x_{-w_i(j)}(\alpha) \text{ für alle } i \in \{1, \dots, 7\}, \\ & j \in \{1, \dots, 63\} \text{ und } \alpha \in K. \end{aligned}$$

Es folgt nun aus einem wohlbekannten Resultat von Tits[8], daß G_0 eine Gruppe mit BN-Paar vom Typ E_7 ist.

Aus einem weiteren Satz von Tits[7] folgt nun $G_0 \cong E_7(q)$.

§3. Die Identifikation von G mit G_0

Es bleibt noch zu zeigen, daß $G = G_0$ gilt.

Definition 1 Wir setzen $C_i = C(v_i) \cap G_0$ für $i=2,3,4,5$.

Es folgt aus Lemma 2 von §1, daß $U_i \in \text{Syl}_2(C_i) \leq \text{Syl}_2(C_G(v_i))$ gilt.

Lemma 1 $O(C_G(v_i)) = \langle 1 \rangle$ für $i=2,3,4,5$.

Beweis. Das folgt aus Wielandts Fixpunktformel [9],

angewandt auf die Vierergruppe $\langle x_{32}(1), x_{33}(1) \rangle$

Lemma 2 Sei $g \in G$, $x \in G_0$, $x \sim_G v_1$, $x^g \in G_0$.

Dann gilt $g \in G_0$.

Beweis. Die Fusion der Involutionen von G_0 findet schon in G_0 statt. Es gibt also ein Element g_0 aus G_0 derart, daß $x^{g_0} = x^g$ gilt. Es folgt $gg_0^{-1} \in C_G(x) \leq G_0$ und somit $g \in G_0$.

Lemma 3 Die Gruppen $Z(O_2(C_i))$ sind stark abgeschlossen in U_i bezüglich $C_G(v_i)$, $i=2,3,4,5$.

Beweis. Wir nehmen an, es gebe Elemente $g \in C_G(v_i)$, $x \in Z(O_2(C_i))$, $y \in U_i - Z(O_2(C_i))$ derart, daß $x^g = y$ gilt.

Dann muß $g \in C_G(v_i) - C_i$ sein.

Wir wählen x so, daß $C(x) \cap U_i \in \text{Syl}_2(C(x) \cap C_i)$ gilt und bestimmen ein Element $y' \in U_i$ so, daß

$y' \sim y$ unter $C_G(v_i)$ und $C(y') \cap U_i \in \text{Syl}_2(C(y') \cap C_G(v_i))$ gilt.

(1) Ist $y' \in Z(O_2(C_i))$, so gibt es ein Element $E_1 \in C_G(v_i)$ mit $y^{E_1} = y'$, $C(y)^{E_1} \cap U_i \leq C(y') \cap U_i$.

(2) Ist $y' \notin Z(O_2(C_i))$, so gibt es ein Element $E_1 \in C_G(v_i)$ mit $x^{E_1} = y'$, $C(x)^{E_1} \cap U_i \leq C(y') \cap U_i$.

Aus Lemma 2 folgt in beiden Fällen $E_1 \in C_i$, ein Widerspruch.

q. e. d.

Aus den Lemmata 1 und 3 folgt mit Hilfe von Goldschmidts Resultat [3], daß $Z(O_2(C_i))$ ein Normalteiler von $C_G(v_i)$ sein muß, $i=2,3,4,5$.

Da $Z(O_2(C_i))$ stets 2-zentrale Involutionen enthält, folgt mit Lemma 2, daß $C_i = C_G(v_i)$ gelten muß, $i=2,3,4,5$.

Wir nehmen nun an, es sei $G_0 \neq G$. Dann folgt mit Hilfe von [4, 7.12], daß G genau eine Konjugiertenklasse von Involutionen hat. Dies ist ein Widerspruch.

Wir haben bewiesen, daß $G = G_0 \cong E_7(2^m)$ gilt.

Literatur

- [1] Carter, R.W.: Simple groups of Lie type,
Wiley (1972).
- [2] Gaschütz, W.: Zur Erweiterungstheorie endlicher
Gruppen, J. Math. 190 (1952), 93-107.
- [3] Goldschmidt, D.M.: 2-fusion in finite groups,
Ann. of Math. 99 (1974), 70-118.
- [4] Gorenstein, D.: Finite groups, Harper and Row,
New York, 1968.
- [5] Aschbacher, M.: Involutions in Chevalleygroups
over fields of even order, to appear.
- [6] Steinberg, R.: Automorphisms of finite linear
groups, Canad. J. Math 12 (1960), 606-615.
- [7] Tits, J.: Buildings and BN-pairs of Spherical
Type, Lecture notes, Springer,
Berlin, Heidelberg, New York
- [8] Tits, J.: Théorème de Bruhat et sous-groupes
paraboliques, C.R. Acad. Sciences,
Paris 254 (1962), 2910-2912.
- [9] Wielandt, H.: Beziehungen zwischen den Fixpunkt-
zahlen von Automorphismengruppen einer
endlichen Gruppe, Math. Z. 73 (1960), 146-158.

Lebenslauf (tabellarisch)

16.10.1948	Geburt in Wiesbaden-Bierstadt als Sohn des Mechanikers Harry Bierbrauer und der Schneiderin Anni Bierbrauer
1955-1959	Besuch der Grundschule in Wiesbaden-Bierstadt
1959-1965	Besuch der Gerhard Hauptmann- Realschule in Wiesbaden
1965-1967	Besuch des Gutenberg-Gymnasiums in Wiesbaden mit Abitur als Abschluß
Juli 1967-	Grundwehrdienst bei der Bundeswehr
September 1968	
WS 1968/69-	Studium der Mathematik an der
WS 1970/71	Johannes Gutenberg-Universität in Mainz
SS 1971	Fortsetzung des Studiums an der Universität in München
WS 1971/72-	Fortsetzung des Studiums an der
SS 1974	Universität in Mainz
September 1974	Erwerb des Grades eines Diplom- mathematikers

